FICHE n°10
Probabilités conditionnelles

I. Notations et vocabulaires : quelques rappels…

- ¤ La ***somme*** de toutes les probabilités élémentaires est ***toujours égale à 1***.
- ¤ La probabilité d'un événement quelconque est toujours ***comprise entre 0 et 1***.
- ¤ Certaines situations sont dites d'équiprobabilité : « au hasard », « dé non truqué », « jetons indiscernables au toucher », …

  Dans un cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est : $\mathbf{p(A)} = \dfrac{\textbf{Nombre d'issues favorables}}{\textbf{Nombre d'issues possibles}}$
- ¤ Deux évènements sont ***incompatibles*** lorsqu'ils n'ont pas aucun élément en commun.
- ¤ L'évènement contraire d'un évènement A est noté $\overline{A}$: $\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$
- ¤ $A \cup B$ signifie « A **ou** B » ; $A \cap B$ signifie « A **et** B » : $\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)\ .}$

A partir de ces rappels, faire ATTENTION de bien analyser les énoncés de probabilité :

- ✓ « avec remise » ou sans remise » : lors de plusieurs tirages d'une boule dans une urne, le problème est complètement différent selon que la boule tirée est remise dans l'urne ou non…
- ✓ Lors du calcul d'une probabilité, bien vérifier l'ensemble de référence (univers) précisé dans l'énoncé. Si rien n'est indiqué, cela signifie que l'on se place dans le cas le plus général…

II. Probabilité conditionnelle avec un tableau à double entrée

<u>Exemple</u> *(voir activité p 68)*

A l'épreuve pratique du permis de conduire, on a observé les résultats suivants sur un échantillon de 503 candidats se présentant pour la première fois.

A

$A \cap C$

Candidats	avec conduite accompagnée (C)	sans conduite accompagnée ($\overline{C}$)	*Total*
Admis (A)	70	200	270
Refusés ($\overline{A}$)	14	211	225
Total	84	416	500

1. On choisit au hasard un candidat dans cet échantillon : la population de référence est « tous les candidats », soit un total de 500 candidats.

- La probabilité qu'un élève soit admis est : $p(A) = \dfrac{270}{500} = \dfrac{27}{50}$.
- La probabilité qu'un élève ait pratiqué la conduite accompagnée **et** soit admis est : $p(A \cap C) = \dfrac{70}{500} = \dfrac{7}{50}$

2. Le candidat choisit au hasard déclare avoir pratiqué la conduite accompagnée : ainsi, la population de référence est « les candidats qui ont pratiqué la conduite accompagné », soit 84 candidats.

Sachant qu'il a pratiqué la conduite accompagnée, la probabilité que cet élève soit admis est :

$$\mathbf{P_C(A)} = \frac{70}{84} = \frac{5}{6}.$$

Définition Pour tout évènement A et B tel que $P(B) \neq 0$,

la ***probabilité conditionnelle de A sachant B*** notée $p_B(A)$, est le nombre $\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$.

EXERCICE TYPE 1 *Déterminer des probabilités conditionnelles à partir d'un tableau d'effectifs*

Dans le cadre de l'exemple ci-dessus :

1. On choisit au hasard un candidat dans cet échantillon.
Calculer la probabilité qu'un candidat ait pratiqué la conduite accompagnée.

2. Le candidat choisit au hasard déclare avoir été admis à l'épreuve pratique.
Calculer alors la probabilité que ce candidat ait pratiqué la conduite accompagnée.

Solution ***1.*** On choisit au hasard un candidat dans cet échantillon : la population de référence est « tous les candidats », soit un total de 500 candidats.

La probabilité qu'un élève ait pratiqué la conduite accompagnée est : $\mathbf{P(C)} = \frac{84}{500} = \mathbf{\frac{21}{125}}$.

2. Le candidat choisit au hasard déclare avoir été admis à l'épreuve pratique.
Sachant qu'il a été admis à l'épreuve pratique, la probabilité que cet élève ait pratiqué la conduite accompagnée est : $\mathbf{P_A(C)} = \frac{70}{270} = \mathbf{\frac{7}{27}}$.

EXERCICE TYPE 2 *Déterminer des probabilités conditionnelles à partir de données probabilistes*

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω tels que $P(A) = 0{,}5$; $P(A \cap B) = 0{,}3$ et $P_B(A) = 0{,}4$.

1. Calculer $P_A(B)$.

2. Calculer $P(B)$.

Solution ***1.*** D'après la leçon, on a : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$.

2. D'après la leçon, on a également : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Avec les données et la question précédente, on obtient : $\frac{0{,}4}{1} = \frac{0{,}3}{P(B)}$

Le produit en croix permet de conclure que : $P(B) = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$

III. *Avec un arbre de probabilité*

<u>*Exemple*</u>

Dans un mélange de graines de fleurs roses et de fleurs jaunes, 60 % sont des graines de fleurs roses.
Par ailleurs, seulement 50 % des graines de fleurs roses germent correctement, mais 80 % des graines de fleurs jaunes germent correctement.
On veut connaître la probabilité qu'une graine choisie au hasard germe…

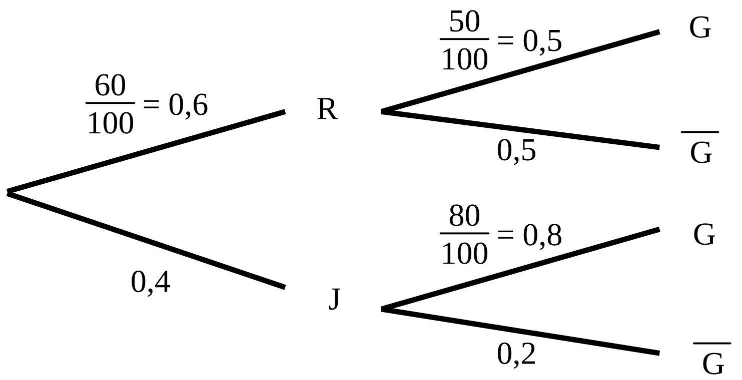
Notons R, J et G les évènements suivants :

R : « la graine choisie au hasard est une graine de fleur rose. »

J : « la graine choisie au hasard est une graine de fleur rose. »

G : « la graine choisie au hasard germe correctement. »

On peut représenter cette situation par un tableau à double entrée comme dans les exemples précédents, ou par un ***arbre de probabilités*** :



<u>*Remarques*</u>

¤ **La somme des probabilités des branches de même origine est égale à 1.**

Par exemple : $P(J) = 1 – P(R) = 1 – 0,6 = 0,4$

¤ **La probabilité de l'intersection $J \cap G$ est la probabilité de la branche complète correspondante.**
Elle est égale au produit des branches qui la composent.

Par exemple : $P(J \cap G) = P(J) \times P_J(G) = 0,4 \times 0,8 = 0,32$

¤ **La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités de toutes les branches complètes qui réalise cet évènement.**

Par exemple, la probabilité qu'une graine choisie au hasard germe est égale à :

$$P(G) = P(R \cap G) + P(J \cap G)$$
$$= 0,6 \times 0,5 + 0,4 \times 0,8$$
$$= 0,62.$$

IV. *Evènements indépendants*

<u>*Définition*</u> On dit que deux évènements A et B sont ***indépendants*** lorsque la probabilité de l'intersection est égale au produit des probabilités des évènements A et B.

A et B sont ***indépendants*** revient à écrire que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

ATTENTION ! **Cette formule n'est vraie <u>que si les évènements sont indépendants</u>.**
Il ne faut surtout pas l'utiliser dans le cas général !

<u>*Propriété*</u> Soit A et B deux évènements de probabilité non nulle.

A et B sont ***indépendants*** revient à écrire que $P_B(A) = P(A)$

<u>*Démonstration*</u> D'après la leçon, on sait : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

A et B sont ***indépendants*** revient à écrire que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

ou encore que $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

ou encore que $P_A(B) = \dfrac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$

<u>*Interprétation*</u> Dire que deux évènements sont indépendants signifie concrètement que la probabilité de l'un est la même avec ou sans la condition que l'autre se réalise…

EXERCICE TYPE 3 ***Déterminer si des évènements sont indépendants ou non***

On lance une pièce de monnaie deux fois de suite et on considère les trois évènements suivants :

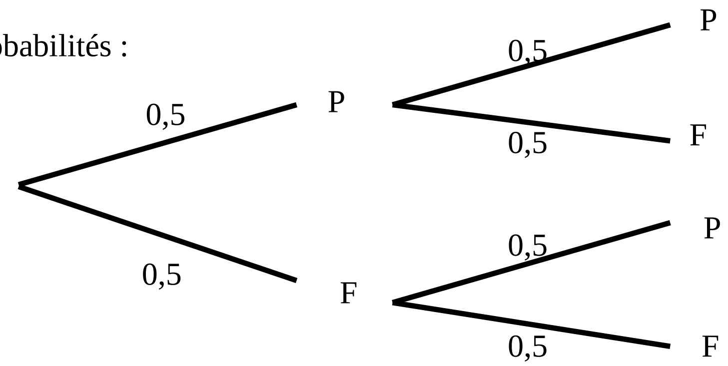
A : « J'obtiens « Pile » au 1^{er} lancer ».

B : « J'obtiens deux résultats identiques ».

Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

<u>*Solution*</u>

Représentons la situation par un arbre des probabilités :



On a ainsi : $P(A) = 0,5$ *(j'obtiens « Pile » au 1^{er} lancer »)*

$P(B) = 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 = 0,5$ *(j'obtiens deux fois « Pile » ou deux fois « Face »)*

Pour savoir si les évènements A et B sont indépendants, d'après la définition ci-dessus, il nous faut comparer $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$. S'ils sont égaux, les évènements A et B sont indépendants.

¤ D'après l'arbre : $P(A \cap B) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$ *(j'obtiens « Pile » au 1^{er} <u>et</u> le même résultat au $2^{ème}$)*

¤ D'autre part : $P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$ *(d'après les résultats trouvés ci-dessus)*

On observe donc que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Autrement dit, les évènements A et B sont indépendants.