FICHE n°8
Fonctions Exponentielles et logarithme décimal

I. Fonctions exponentielles $x \longmapsto a^x$

Soit a un nombre réel strictement positif.

Définition On admet que, pour tout réel x, il existe un nombre réel strictement positif a^x, qui se lit « a exposant x ».

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto a^x$ est appelée ***fonction exponentielle de base a.***

Remarques
¤ Lorsque $a = 1$, alors la fonction est constante et égale à 1.
¤ Ces fonctions sont une généralisation de notation « puissances » vues précédemment. Toutes les propriétés des exposants entiers s'étendent ainsi aux exposants réels comme suit.

Propriétés Pour tout nombre réel x et x', et tout nombre réel a et b strictement positif, on a :

propriété s admises

- $1^x = 1$ et $a^0 = 1$
- $a^x \times a^{x'} = a^{x+x'}$; $\dfrac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'}$ et $\dfrac{1}{a^x} = {}^{-x}$
- $a^x \times b^x = (ab)^x$ et $(a^x)^{x'} = (a)^{x \times x'}$

Remarque Il n'existe aucune formule du type ci-dessus avec les additions ou les soustractions.

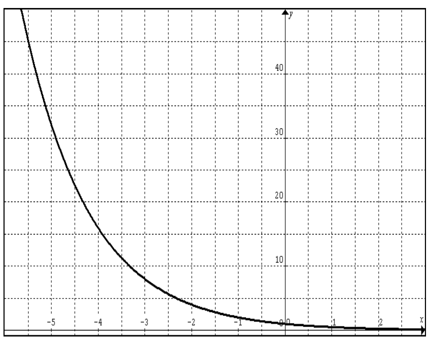
Sens de variation

propriété admise

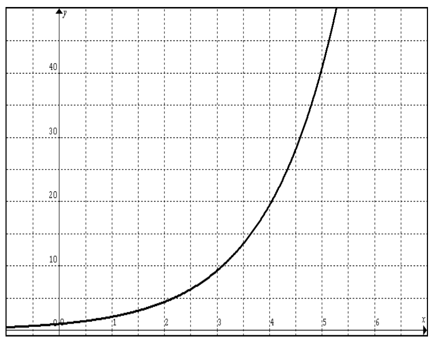
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto a^x$ est :
☞ strictement croissante lorsque $a > 1$
☞ constante lorsque $a = 1$
☞ strictement décroissante lorsque $0 < a < 1$.

*Allures des courbes représentatives de fonctions exponentielles selon les valeurs de **a***

cas $a < 1$



cas $a > 1$



Remarques Les courbes représentatives des fonctions exponentielles passent toujours par le point de coordonnées (0 ; 1) puisque $a^0 = 1$…

Signe des fonctions exponentielles (propriété admise)

Les fonctions exponentielles sont des fonctions **toujours positives**.
Autrement dit, les courbes sont toujours au-dessus de l'axe des abscisses…

EXERCICE TYPE 1

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes : ***a.*** $7{,}1^x < 7{,}1^3$ ***b.*** $0{,}35^x \leq 0{,}35^9$

Méthode **Théorème à savoir**

- Une fonction strictement croissante conserve l'ordre.
  Autrement dit avec f une fonction strictement ***croissante*** : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$
- Une fonction strictement décroissante inverse l'ordre.
  Autrement dit avec f une fonction strictement ***décroissante*** : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) > f(x_2)$

Solution

a. $7{,}1^x < 7{,}1^3$: comme $7{,}1 > 1$, la fonction $x \longmapsto 7{,}1^x$ est strictement croissante sur ℝ.
Ainsi $7{,}1^x < 7{,}1^3$ revient à $x < 3$

Conclusion : Les solutions de l'inéquation $7{,}1^x < 7{,}1^3$ sont tous les réels x tels que $x < 3$.

b. $0{,}35^x \leq 0{,}35^9$: comme $0{,}35 < 1$, la fonction $x \longmapsto 0{,}35^x$ est décroissante sur ℝ.
Ainsi $0{,}35^x \leq 0{,}35^9$ revient à $x \geq 9$

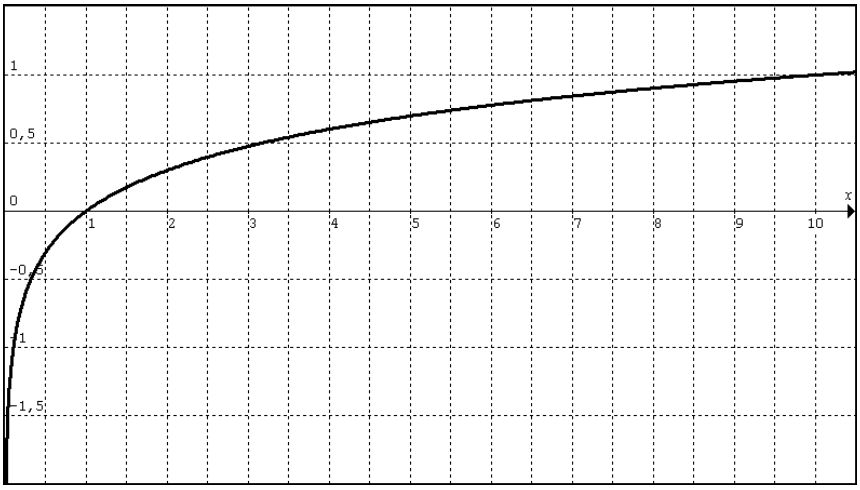
Conclusion : Les solutions de l'inéquation $0{,}35^x \leq 0{,}35^9$ sont tous les réels x tels que $x \geq 9$.

II. *Fonction logarithme décimal* $x \longmapsto \log(x)$

Définition On admet qu'il existe une unique fonction, appelée « ***logarithme décimal*** » et notée « ***log*** », telle que :
¤ ***log*** est définie sur $]0\,;+\infty[$;
¤ pour tout réel x, on a : $\log(10^x) = x$.

Remarques ¤ On dit que la fonction ***log*** est la fonction réciproque de la fonction $x \longmapsto 10^x$.

Courbe représentative de la fonction logarithme décimal



Variation
propriété admise

La fonction ***log*** définie sur $]0\,;+\infty[$ par $x \longmapsto \log(x)$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Signe
propriété admise

¤ Si $0 < x < 1$, alors $\log(x) < 0$ (strictement négatif) .
¤ Si $x > 1$, alors $\log(x) > 0$ (strictement positif) .

Propriétés Pour tout nombre réel $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont strictement positifs, on a :

> - $\boldsymbol{log}(\boldsymbol{a}) < \boldsymbol{log}(\boldsymbol{b})$ revient à dire que $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$
> - $\boldsymbol{log}(\boldsymbol{ab}) = \boldsymbol{log}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{log}(\boldsymbol{b})$
> - $\boldsymbol{log}(\boldsymbol{a}^x) = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{log}(\boldsymbol{a})$

Preuves :

- On sait qu'une fonction croissante conserve l'ordre.

  Comme la fonction ***log*** est strictement croissante, on peut conclure que :

  $\boldsymbol{log}(\boldsymbol{a}) < \boldsymbol{log}(\boldsymbol{b})$ revient à dire que $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$

- d'une part : $10^{log(ab)} = \boldsymbol{ab}$ par définition de la fonction ***log***.

  d'autre part : $10^{log(a) + log(b)} = 10^{log(a)} \times 10^{log(b)} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{ab}$.

  Autrement dit : $10^{log(ab)} = 10^{log(a) + log(b)}$ ce qui revient à $\boldsymbol{log}(\boldsymbol{ab}) = \boldsymbol{log}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{log}(\boldsymbol{b})$

- la 3$^{\text{ème}}$ propriété sera admise…

III. Résoudre des (in-)équations du type $a^x = b$ ou $a^x < b$

EXERCICE TYPE 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a. $1{,}2^x = 0{,}8$ ***b.*** $3 \times 4^x = 7$ ***c.*** $0{,}7^x < 0{,}5$ ***d.*** $1{,}3^x \geq 50\,000$ ***e.*** $1\,500 \times (0{,}83)^x > 500$

Méthode Pour résoudre ce type d'équations et inéquations, on utilise la fonction ***log*** et ses propriétés ci-dessus décrites…

$\boldsymbol{a}^x < \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{log}(\ \boldsymbol{a}^x\ ) < \boldsymbol{log}(\boldsymbol{b})$ car la fonction ***log*** est strictement croissante.

$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{log}(\boldsymbol{a}) < \boldsymbol{log}(\boldsymbol{b})$ d'après la 3$^{\text{ème}}$ propriété ci-dessus

*si **a** < **1**, alors*
log(***a***) *est <u>négatif</u>,*
donc l'ordre change…

$$\boldsymbol{x} > \frac{\boldsymbol{log}(\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{log}(\boldsymbol{a})}$$

*si **a** > **1**, alors*
log(***a***) *est <u>positif</u>,*
donc l'ordre est conservé…

$$\boldsymbol{x} < \frac{\boldsymbol{log}(\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{log}(\boldsymbol{a})}$$

Solution

a. $1{,}2^x = 0{,}8$

$\boldsymbol{log}(\ 1{,}2^x\ ) = \boldsymbol{log}(0{,}8)$

$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{log}(1{,}2) = \boldsymbol{log}(0{,}8)$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{log}(0{,}8)}{\boldsymbol{log}(1{,}2)} \approx -1{,}22$$

b. $3\times 4^x = 7$

$4^x = \dfrac{7}{3}$

$\boldsymbol{log}(\ 4^x\ ) = \boldsymbol{log}(\dfrac{7}{3})$

$x\ \times \boldsymbol{log}(4) = \boldsymbol{log}(\dfrac{7}{3})$

$x = \dfrac{\boldsymbol{log}(\frac{7}{3})}{\boldsymbol{log}(4)} \approx 0{,}61$

c. $0{,}7^x < 0{,}5$

$\boldsymbol{log}(\ 0{,}7^x\ ) < \boldsymbol{log}(0{,}5)$

$x\ \times \boldsymbol{log}(0{,}7) < \boldsymbol{log}(0{,}5)$

Pour résoudre cette inéquation, il nous faut diviser par ***log***(0,7).

Comme 0,7 < 1, ***log***(0,7) est négatif et donc l'ordre change de sens.

D'où : $x > \dfrac{\boldsymbol{log}(0{,}5)}{\boldsymbol{log}(0{,}7)}$

soit : $x > 1{,}9$

d. $1{,}3^x \geq 50\ 000$

$\boldsymbol{log}(\ 1{,}3^x\ ) \geq \boldsymbol{log}(50\ 000)$

$x\ \times \boldsymbol{log}(1{,}3) \geq \boldsymbol{log}(50\ 000)$

Pour résoudre cette inéquation, il nous faut diviser par ***log***(1,3).

Comme 1,3 > 1, ***log***(1,3) est positif et donc l'ordre est conservé.

D'où : $x \geq \dfrac{\boldsymbol{log}(50\ 000)}{\boldsymbol{log}(1{,}3)}$

soit : $x \geq 41{,}2$

d. $1\ 500 \times 0{,}83^x > 500$

$0{,}83^x > \dfrac{500}{1\ 500}$

$\boldsymbol{log}(\ 0{,}83^x\ ) \geq \boldsymbol{log}(\dfrac{500}{1\ 500})$

$x\ \times \boldsymbol{log}(0{,}83) \geq \boldsymbol{log}(\dfrac{500}{1\ 500})$

Pour résoudre cette inéquation, il nous faut diviser par ***log***(0,83).

Comme 0,83 < 1, ***log***(0,83) est négatif et donc l'ordre change de sens.

D'où : $x \leq \dfrac{\boldsymbol{log}(\frac{500}{1\ 500})}{\boldsymbol{log}(0{,}83)}$ soit : $x \leq 6{,}75$