FICHE n°7
Sens de variation d'une fonction

THEOREME FONDAMENTAL *(admis)*

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Lorsque la fonction dérivée ***f ' est strictement positive*** sur I, alors ***f* est *strictement croissante*** sur I.
- Lorsque la fonction dérivée ***f ' est strictement négative*** sur I, alors ***f* est *strictement décroissante*** sur I.
- Lorsque la fonction dérivée *f '* est *nulle* sur I, alors *f* est *constante* sur I.

Méthode Grâce au théorème fondamental, pour étudier les variations d'une fonction dérivable, il suffît de :

- ☞ Etudier le signe de la fonction dérivée (et rechercher les nombres éventuels qui annulent la dérivée) ;
- ☞ Appliquer le théorème ci-dessus pour dresser le tableau de variation de la fonction…

Il est conseillé de tracer la fonction avec la calculatrice graphique pour observer ces variations.

Plan d'étude d'une fonction

- *On calcule la dérivée de la fonction*
- *On transforme l'expression de la dérivée en la factorisant*
- *Avec la forme factorisée de la dérivée, on étudie le signe de la dérivée :*
  - *On commence d'abord par chercher les valeurs qui annulent la dérivée (1ère ligne du tableau)*
  - *On étudie ensuite les signes des expressions de la forme factorisée (fiche 3)*
  - *On écrit alors le signe de la dérivée en faisant le bilan grâce à la règle des signes*
  - *On écrit aussi les « zéros », c'est à dire là où la dérivée est nulle (tangente horizontale)*
- *A partir du signe de la dérivée, on détermine les variations de la fonction*
- *On complète le tableau de variations avec les minimum et/ou maximum de la fonction.*

EXERCICE TYPE 1 *Déterminer par le calcul les variations d'une fonction (1)*

Etudier les variations de la fonction f définie sur [–3 ; 5] par $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

Solution

¤ Commençons par déterminer la dérivée de f : $\boldsymbol{f'(x)} = 3\times 2x - 12 = \mathbf{6x - 12}$

¤ Etudions le SIGNE de la DERIVEE, puis on en déduit les VARIATIONS de la FONCTION dans le même tableau…

$6x - 12 = 0$

$6x = 12$

$x = \dfrac{12}{6} = \mathbf{2}$

x	-3		2		5
SIGNE de f'(x) = 6x – 12		**–**	**0**	**+**	
VARIATIONS de f	**72**	↘	**– 3**	↗	**24**

¤ Ne pas oublier de compléter les variations avec les valeurs extrêmes :

$f(\mathbf{-3}) = 3\times(\mathbf{-3})^2 - 12\times(\mathbf{-3}) + 9 = \mathbf{72}$; $f(\mathbf{2}) = 3\times\mathbf{2}^2 - 12\times\mathbf{2} + 9 = \mathbf{-3}$

$f(\mathbf{5}) = 3\times\mathbf{5}^2 - 12\times\mathbf{5} + 9 = \mathbf{24}$

EXERCICE TYPE 2 *Déterminer par le calcul les variations d'une fonction (2)*

Dans une PME qui fabrique et vends des produits pharmaceutiques identiques, le bénéfice réalisé par la vente de $\boldsymbol{x}$ produits est donné, en euros, par $B(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}^3 + 60\boldsymbol{x}^2 + 528\boldsymbol{x}$.

On admet que $B'(\boldsymbol{x}) = 3(-\boldsymbol{x}-4)(\boldsymbol{x}-44)$.

Etudier les variations de cette fonction B sur [0 ; 60] et en déduire le nombre de produits à vendre pour obtenir le bénéfice maximal et le bénéfice maximal ainsi obtenu ?

Solution

¤ D'après l'énoncé, on sait que : $B'(\boldsymbol{x}) = 3(-\boldsymbol{x}-4)(\boldsymbol{x}-44)$.

¤ Etudions le SIGNE de la DERIVEE, c'est-à-dire de $B'(\boldsymbol{x})$:

$-\boldsymbol{x} - 4 = 0 \iff \boldsymbol{x} = -4$

$\boldsymbol{x} - 44 = 0 \iff x = 44$.

x	0		44		60
$-\boldsymbol{x} - 4$		–	|	–	
$\boldsymbol{x} - 44$		–	0	+	
SIGNE de B'(x)		+	0	–	
VARIATIONS de B	0	↗	54 208	↘	31 680

¤ Ne pas oublier de compléter les variations avec les valeurs extrêmes…

¤ Ce tableau de variations signifie que :

- La fonction B est décroissante sur]–∞ ; – 4] et sur [44 ; + ∞[
- La fonction B est croissante sur [– 4 ; 44]

On peut donc en déduire que :

☞ Il faut vendre 44 objets pour atteindre le bénéfice maximal.

☞ Le bénéfice maximal sera alors de 54 208 €.

EXERCICE TYPE 3 **Déterminer par le calcul les variations d'une fonction (3)**

Etudier les variations de la fonction f définie sur [–10 ; 10] par $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 1$

Solution

- *Calcul de la dérivée :* $f'(x) = -3x^2 + 5\times 2x = -3x^2 + 10x$

- *Factorisation de la dérivée (pour pouvoir étudier le signe ensuite…) :* $f'(x) = x(-3x + 10)$

- *Etude du signe de la dérivée (tableau de signes) puis des variations de la fonction*
  On commence par chercher les valeurs de x qui annule f'
  soit $x = \mathbf{0}$; soit $-3x + 10 = 0 \Leftrightarrow -3x = -10 \Leftrightarrow x = \frac{-10}{-3} = \mathbf{\frac{10}{3}}$.

x	-10		$\mathbf{0}$		$\mathbf{\frac{10}{3}}$		10
x		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x + 10$		$+$		$+$	0	$-$	
SIGNE de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
VARIATIONS de f	1 499	↘	-1	↗	$\frac{473}{27}$	↘	-501

- *Calcul des extrema locaux :* $f(\mathbf{0}) = -\mathbf{0}^3 + 5\times\mathbf{0}^2 - 1 = -1$

$$f\left(\frac{10}{3}\right) = -\left(\frac{10}{3}\right)^3 + 5\times\left(\frac{10}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{1\,000}{27} + \frac{500}{9} - 1 = -\frac{1\,000}{27} + \frac{1\,500}{27} - \frac{27}{27} = \frac{473}{27}$$

Ce tableau de variations signifie que :

« La fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ puis sur $[\frac{10}{3}; +\infty[$ et croissante sur $[0\,;\frac{10}{3}]$. »