FICHE n°5
Nombre dérivé et tangente à une courbe

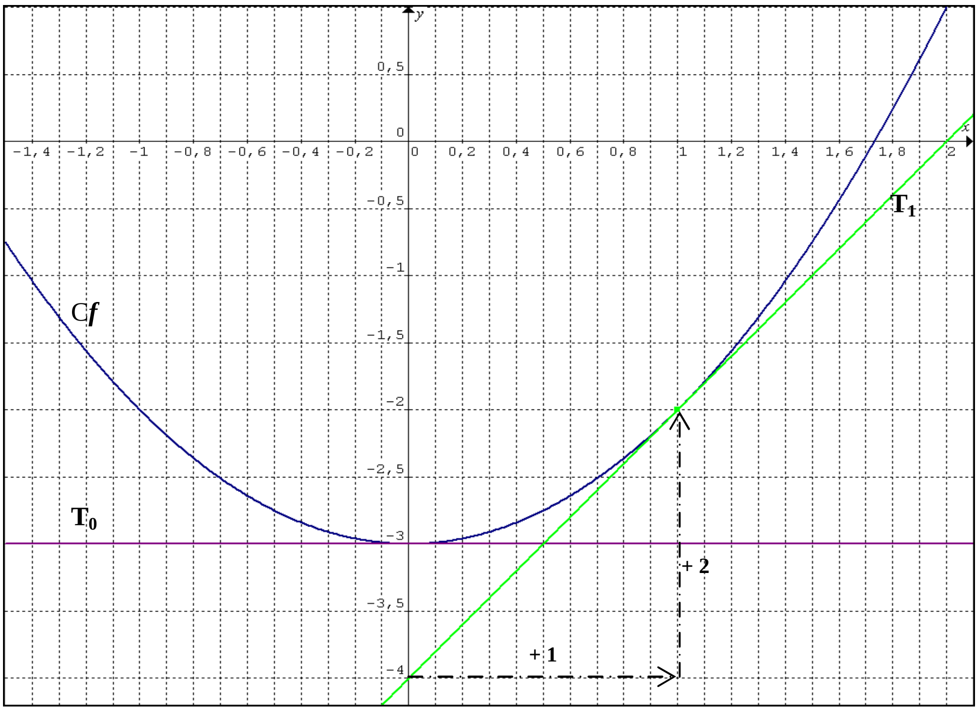
I. *Tangente à une courbe*

L'idée La définition d'une tangente est trop compliquée pour être exposée ici et est hors programme.
L' « idée principale » est la suivante :

> La ***tangente à une courbe en un point A*** est une droite : ¤ qui passe par le point A ;
> ¤ qui « effleure » la courbe .

EXERCICE TYPE 1 ***Lire graphiquement une équation d'une tangente***

On a représenté ci-dessous la courbe (C***f***) représentative d'une fonction ***f***.



Déterminer graphiquement une équation de :

a. la tangente T_1 à la courbe (C***f***) au point d'abscisse 1.

b. la tangente T_0 à la courbe (C***f***) au point d'abscisse 0.

Solution **a.** Le point de la courbe d'abscisse 1 est le point (1 ; –2).
Graphiquement (voir fiche « Equations de droites »), on peut déterminer :

¤ le coefficient directeur de la droite T_1 : $\frac{2}{1} = 2$

¤ l'ordonnée à l'origine de la droite T_1 : –4

Une équation de la tangente (T_1) est donc : $y = 2x - 4$.

b. Le point de la courbe d'abscisse 0 est le point (0 ; –3).
Comme la droite (T_0) est horizontale (pas de pente), son coefficient directeur est 0.
Une équation de la tangente (T_0) est donc : $y = -3$.

Remarque La tangente à une courbe en un point A donne « l'allure de la pente de la courbe » juste autour de point A.

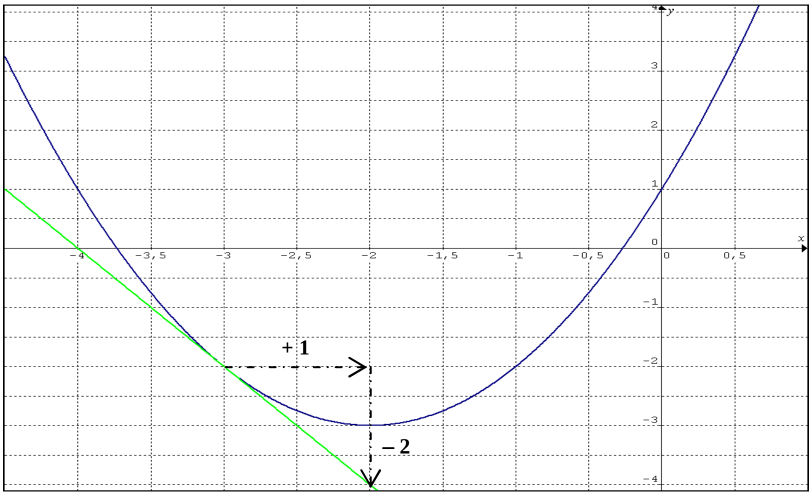
II. *Nombre dérivé*

<u>*Définition*</u> Si la courbe représentative d'une fonction $\boldsymbol{f}$ admet une tangente T_a en un point A d'abscisse $\boldsymbol{a}$, le coefficient directeur de cette tangente T_a est appelé ***nombre dérivé*** de la fonction $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$.
On le note $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$.

EXERCICE TYPE 2 *Déterminer graphiquement un nombre dérivé*

On a représenté ci-contre la courbe (C$\boldsymbol{g}$) représentative d'une fonction $\boldsymbol{g}$ ainsi que la tangente Δ à (C$\boldsymbol{g}$) au point d'abscisse (–3).

Déterminer graphiquement $\boldsymbol{g}(-3)$ et $\boldsymbol{g}'(-3)$.



<u>*Solution*</u>

¤ $\boldsymbol{g}(-3)$ est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse (–3), soit $\boldsymbol{g}(-3) = -2$.

¤ Par définition, $\boldsymbol{g}'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C$\boldsymbol{g}$) au point d'abscisse (–3), c'est donc le coefficient directeur de Δ.

Graphiquement, on a donc : $\boldsymbol{g}'(-3) = \dfrac{-2}{+1} = -2$

EXERCICE TYPE 3 *Déterminer par le calcul une équation d'une tangente*

On considère la fonction $\boldsymbol{h}$: $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{x}^3 - 9\boldsymbol{x} + 2$ et on note (C$\boldsymbol{h}$) sa courbe représentative.
On admet dans cet exercice que $\boldsymbol{h}'(2) = 3$. *(voir fiche « Calculer une dérivée »)*

a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (C$\boldsymbol{h}$) au point A d'abscisse 2.
b. Tracer la tangente T dans le graphique donné ci-dessous avec la courbe (C$\boldsymbol{h}$).

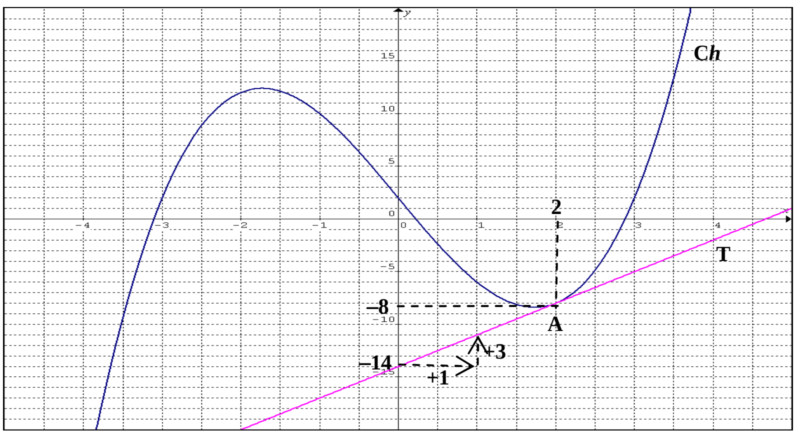
<u>*Solution*</u>

a. ¤ Par définition du nombre dérivé, ***h'(2)*** est le ***coefficient directeur*** de la tangente T…
Donc une équation de la droite T peut s'écrire sous la forme :
$\boxed{y = 3x + b}$ (*) où $\boldsymbol{b}$ est l'ordonnée à l'origine.

¤ Comme T est la tangente à la courbe (C$\boldsymbol{h}$) représentative de la fonction $\boldsymbol{h}$ au point A d'abscisse 2, on sait que ***la tangente T passe par le point A***.
Déterminons les coordonnées du point A :
Comme $\boldsymbol{h}(2) = 2^3 - 9\times2 + 2 = 8 - 18 + 2 = -8$, le point A a pour coordonnées (2 ; –8).
Avec l'équation (*), on peut écrire que : $-8 = 3\times2 + \boldsymbol{b} \Leftrightarrow -8 = 6 + \boldsymbol{b} \Leftrightarrow -8 - 6 = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boxed{-14 = \boldsymbol{b}}$

¤ <u>*Conclusion*</u> : une équation de la tangente T à (C$\boldsymbol{h}$) au point A d'abscisse 2 est : <u>$y = 3x - 14$</u> .

b.



III. Position d'une tangente par rapport à une courbe

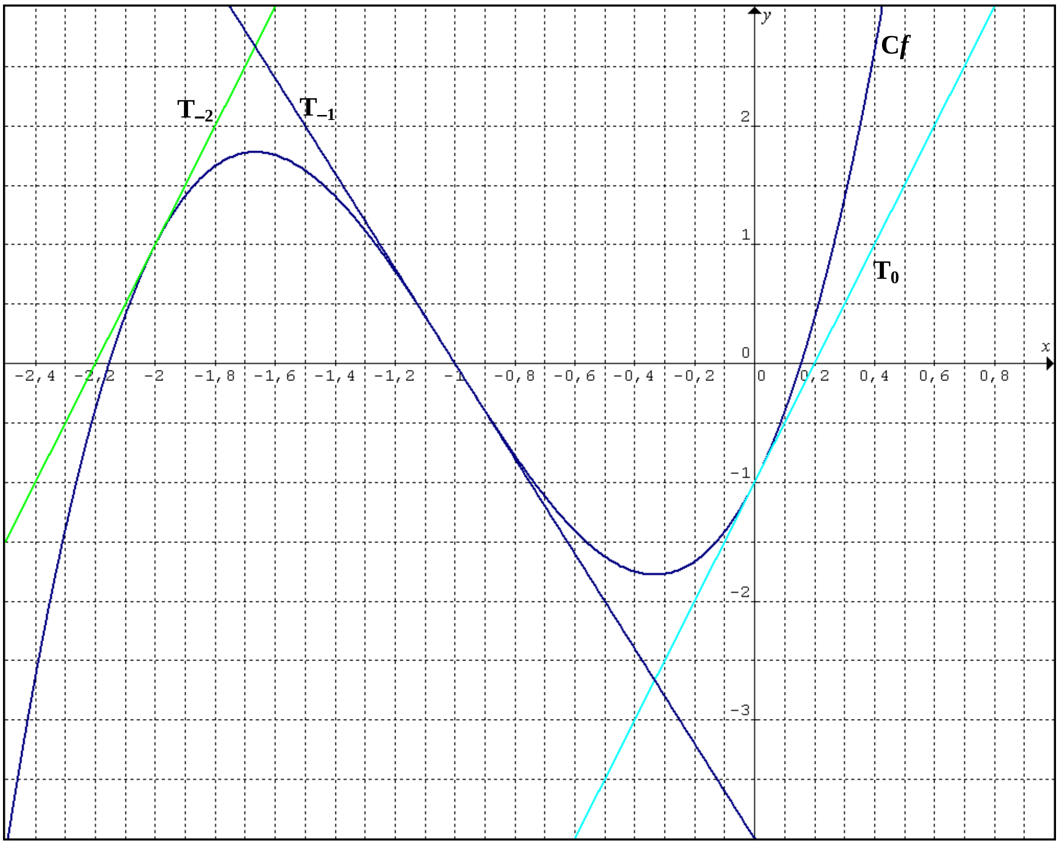
Comprendre la consigne

Déterminer graphiquement la position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point d'abscisse ***a*** revient à déterminer si, juste autour du point d'abscisse ***a*** :

- la courbe est au-dessous de sa tangente.
- la courbe est au-dessus de sa tangente.
- la courbe traverse sa tangente.

Exemples

On a représenté ci-dessous la courbe (C***f***) représentative d'une fonction ***f*** et on a tracé les tangentes T_{-2}, T_{-1} et T_0 à cette courbe aux points d'abscisses (–2), (–1) et 0.



Graphiquement, on peut observer que :

- ✓ Au point d'abscisse (–2), la courbe est au-dessous de la tangente ;
- ✓ Au point d'abscisse 0, la courbe est au-dessus de la tangente ;
- ✓ Au point d'abscisse (–1), la courbe traverse la tangente.
  - si ***x*** < –1, la courbe est au-dessous de sa tangente
  - si ***x*** > –1 et la courbe est au-dessus de as tangente.

Interprétation

La position relative de la courbe par rapport à une tangente donne des informations sur ***la vitesse d'évolution*** du phénomène observé…

Par exemple, *dans le cas où une fonction est croissante*,

¤ Si la courbe est ***au dessus*** de la tangente, cela signifie que le phénomène observé évolue ***de plus en plus vite***.

¤ Si la courbe est ***en dessous*** de la tangente, cela signifie que le phénomène observé évolue ***de moins en moins vite***.