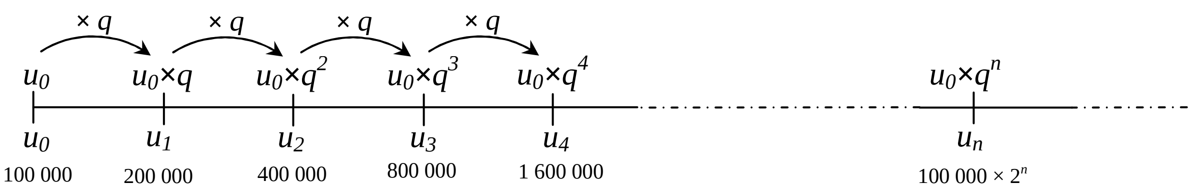
Terminale ST2S

FICHE n°2
Suites géométriques

I. Qu'est ce qu'une suite géométrique ?

Un exemple concret

Une population de bactéries double toutes les heures.
On observe un échantillon contenant initialement 100 000 bactéries.
On pose $u_0 = 100\ 000$ et on note u_n le nombre de bactéries n heures après le début de l'observation.
Comme, entre deux heures consécutives, le nombre de bactéries est toujours multiplié par le même nombre 2, on dit que (u_n) *est une suite géométrique de premier terme* $u_0 = 100\ 000$ *et de raison* $q = 2$.



Dans cet exemple, on peut par exemple écrire que pour tout entier naturel n :

- $u_n = 100\ 000 \times 2^n$
- $u_{n+1} = u_n \times 2$

Définition Une suite (u_n) est dite ***géométrique*** si on passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre que l'on appelle ***raison*** et que l'on note souvent q.

On a alors : $\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$

Remarques Si le premier terme est u_0 , le terme général d'une suite géométrique sera alors : $\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$

Si le premier terme est u_1 , le terme général d'une suite géométrique sera alors : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

II.Représentations graphiques et sens de variation…

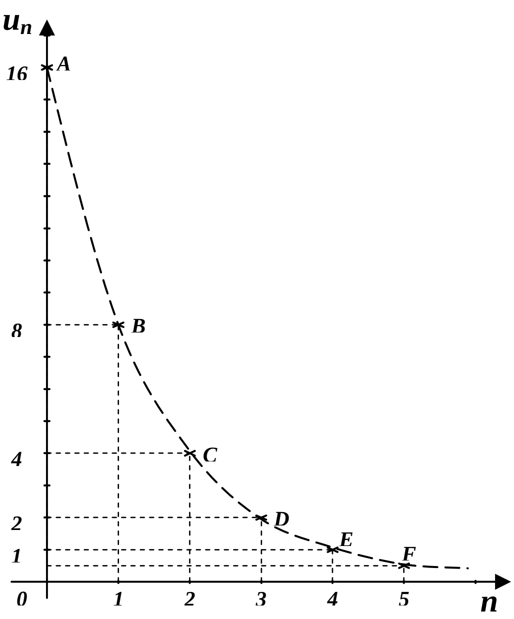
<u>*Exemples*</u>

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 16$ et de raison $q = \frac{1}{2} = 0,5$

Dans ce cas, on a :

n	0	1	2	3	4	5	…	n
u_n	16	8	4	2	1	$0,5$	…	$16\times0,5^n$
Points	A	B	C	D	E	F		

On peut représenter cette suite graphiquement :

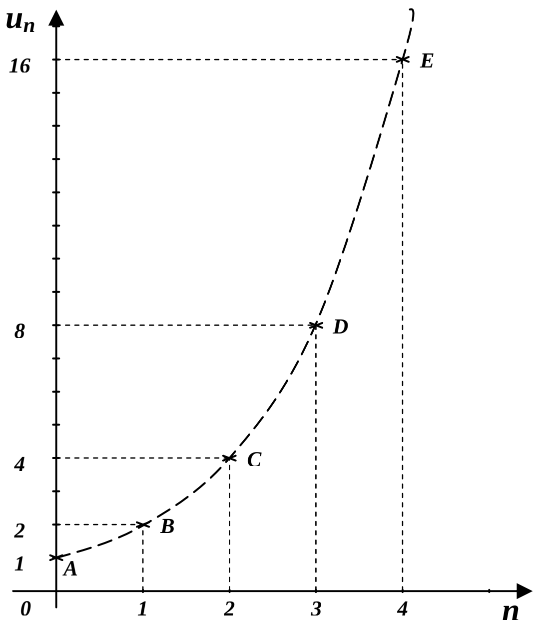


Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 2$.

Dans ce cas, on a :

n	0	1	2	3	4	…	n
u_n	1	2	4	8	16	…	1×2^n
Points	A	B	C	D	E		

On peut représenter cette suite graphiquement :



<u>*Propriétés*</u>

Sur la représentation graphique d'une suite géométrique, les points ne sont pas alignés.
On dit qu'ils sont situés sur une « courbe exponentielle ».

Si la raison est inférieure à 1, alors la suite est décroissante.	Si la raison est supérieure à 1, alors la suite est croissante.
Dans ce cas, on peut écrire : $u_{n+1} < u_n$	Dans ce cas, on peut écrire : $u_{n+1} > u_n$

III. *Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique*

Propriété (admise) Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
On peut déterminer la somme S de termes consécutifs par la formule :

$$\boxed{S = (\textit{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q}}$$

Remarques Si le premier terme est u_0 , alors il y a $(n+1)$ termes entre u_0 et u_n .
Donc, par exemple, entre u_0 et u_6 , il y a *7* termes…

Si le premier terme est u_1 , alors il y a n termes entre u_1 et u_n .
Donc, par exemple, entre u_1 et u_6 , il y a *6* termes…

EXERCICE TYPE 1

Lors d'une épidémie grippale, sur une période de 6 jours, un pharmacien voit la vente de boites du médicament *Mathgrippé* doubler chaque jour. Il en vend 20 le premier jour.
Notons $u_1 = 20$ et u_n le nombre de médicaments *Mathgrippé* vendus le *n-ième* jour.

a. Quel est le nombre total de médicaments vendus au cours de ces 6 jours ?
b. Combien le pharmacien a-t-il vendu de ces médicaments pendant les 3 derniers jours ?

Solution :

« La vente de boites du médicament *Mathgrippé* double chaque jour » : on passe donc d'un terme de la suite (u_n) au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre : il s'agit donc d'une suite géométrique de premier terme $u_1 = 20$ et de raison $q = 2$.

a. D'après la propriété ci-dessus, on peut déterminer le nombre total de médicaments vendus au cours de ces 6 jours grâce à la formule :

$$S = u_1 \times \frac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q}$$

$$S = 20 \times \frac{1 - 2^6}{1 - 2}$$

$$2^6 = \underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2}_{\text{6 fois}} = 64$$

$$S = 20 \times \frac{1 - 64}{1 - 2}$$

$$S = 20 \times \frac{-63}{-1} = 20 \times 63 = 1\,260$$

Le pharmacien a donc vendu 1 260 boites de médicaments durant les 6 jours d'épidémie.

b. Les trois derniers jours, le nombre de médicaments vendus correspond à u_4 , u_5 et u_6 .

D'après la propriété ci-dessus, il faut donc d'abord connaître u_4 :

$$u_4 = u_1 \times q^3 = 20 \times 2^3 = 20 \times 8 = 160$$

On peut désormais appliquer la formule pour ces 3 derniers jours…

$$S = u_4 \times \frac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q}$$

$$S = 160 \times \frac{1 - 2^3}{1 - 2}$$

$$2^3 = 2\times2\times2 =$$

$$S = 160 \times \frac{1 - 8}{1 - 2} = 160 \times \frac{-7}{-1} = 160 \times 7 = 1\,120$$

Le pharmacien a vendu 1 120 de ces médicaments pendant les 3 derniers jours.

IV. Pourcentages d'évolution et suites géométriques

<u>*Rappels*</u>

Augmenter de t % un nombre revient à ***multiplier par*** $\left(1+\frac{t}{100}\right)$ ce nombre.
Diminuer de t % un nombre revient à ***multiplier par*** $\left(1-\frac{t}{100}\right)$ ce nombre.

<u>*EXERCICE TYPE 2*</u>

Une infirmière libérale loue un local depuis le 1^er^ janvier 2000 avec un bail de 20 ans.
Le montant annuel du loyer pour 2000 est de 7 200 euros, mais il augmente chaque année de 2 %.
On note u_n le loyer payé au 1^er^ janvier 2000+n.
Expliquer pourquoi la suite (u_n) est une suite géométrique. Quel est son premier terme ? Sa raison ?

<u>*Solution*</u> Dire que le loyer est augmenté de 2 % par an revient à multiplier le loyer par $\left(1+\frac{2}{100}\right)$, c'est-à-dire par 1,02 chaque année…
La suite (u_n) est donc une suite géométrique.
Son premier terme est u_0 = 7 200 et sa raison est q = 1,02.

<u>*EXERCICE TYPE 3*</u>

Fin de l'épidémie grippale en vue !…
Pour limiter son stock du médicament *Mathgrippé* , le laboratoire qui le produit souhaite diminuer sa production mensuelle… Alors qu'elle était initialement de 20 000 boites, cette production sera diminué de 5 % chaque semaine.
On note u_n le nombre de médicaments *Mathgrippé* produites après n semaines.

a. Expliquer pourquoi la suite (u_n) est une suite géométrique ? Quel est son premier terme ? Sa raison ?
b. Quelle sera la production après 13 semaines (un trimestre) ?

<u>*Solution*</u>

a. Dire que la production sera diminué de 5 % chaque semaine revient à multiplier cette production par $\left(1-\frac{5}{100}\right)$, c'est-à-dire par 0,95 chaque semaine…
La suite (u_n) est donc une suite géométrique.
Son premier terme est u_0 = 20 000 et sa raison est q = 0,95.

b. $u_{13} = u_0 \times q^{13} = 20\,000 \times 0{,}95^{13} \approx 10\,267$
La production après 13 semaines sera de 10 267 boites environ…