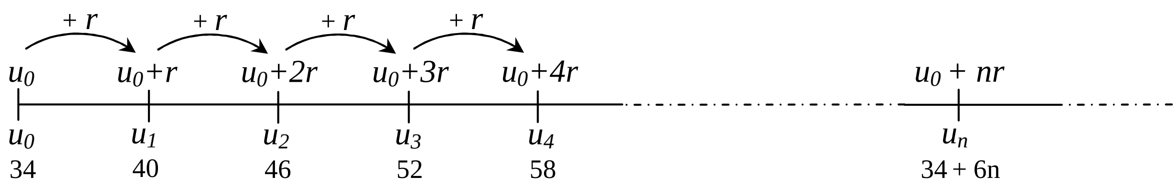
FICHE n°1
Suites arithmétiques

I. Qu'est ce qu'une suite arithmétique ?

<u>Un exemple concret</u>

Lors d'une épidémie, le nombre de patients d'un cabinet médical augmente chaque jour de 6.
Le premier jour, il a reçu 34 patients.
On note u_n le nombre de patients le (n-1)-ième jour.
Comme, entre deux jours consécutifs, l'augmentation du nombre de patients est toujours constante, on dit que (u_n) *est une suite arithmétique de premier terme* $u_0 = 34$ *et de raison* $r = 6$.



Dans cet exemple, on peut par exemple écrire que pour tout entier naturel n :

- $u_n = 34 + 6n$
- $u_{n+1} = u_n + 6$

<u>*Définition*</u> Une suite (u_n) est dite ***arithmétique*** si on passe d'un terme au terme suivant en <u>ajoutant</u> toujours le même nombre que l'on appelle ***raison*** et que l'on note souvent ***r***.

On a alors : $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$

<u>*Remarques*</u> Si le premier terme est u_0 , le terme général d'une suite arithmétique sera alors : $\boxed{u_n = u_0 + nr}$

Si le premier terme est u_1 , le terme général d'une suite arithmétique sera alors : $u_n = u_1 + (n-1)r$

<u>EXERCICE TYPE 1</u>

Dans le problème ci-dessus, donner le nombre de patients reçus le 7ème jour.

<u>*Solution*</u>

Attention de bien lire l'énoncé pour déterminer le terme auquel fat ré&férence la question.
Dans ce problème, le premier terme $u_0 = 34$ correspond au 1er jour…
donc le nombre de patients reçus le 7ème jour correspond au terme u_6 .

D'après la leçon : $u_6 = u_0 + 6r = 34 + 6\times6 = 70$

Conclusion : Le cabinet médical aura reçu 70 patients le 7ème jour.

II. *Représentations graphiques et sens de variation…*

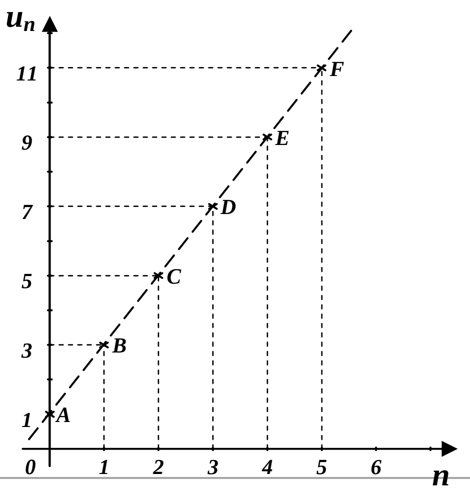
Exemples

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

Dans ce cas, on a :

n	0	1	2	3	4	5	…	n
u_n	1	3	5	7	9	11	…	$1+2n$
Points	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*		

On peut représenter cette suite graphiquement :

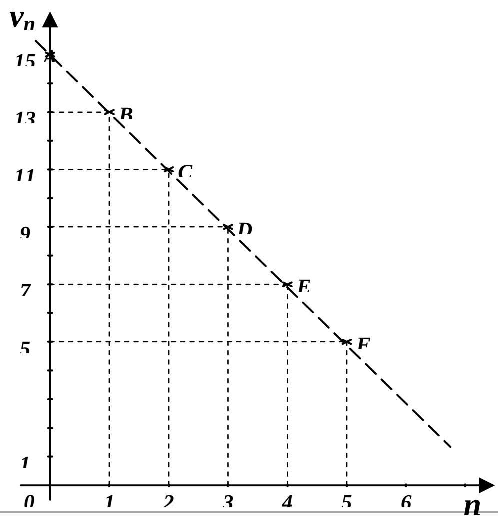


Soit (v_n) une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 15$ et de raison $r = -2$.

Dans ce cas, on a :

n	0	1	2	3	4	5	…	n
v_n	15	13	11	9	7	5	…	$15-2n$
Points	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*		

On peut représenter cette suite graphiquement :



Propriétés

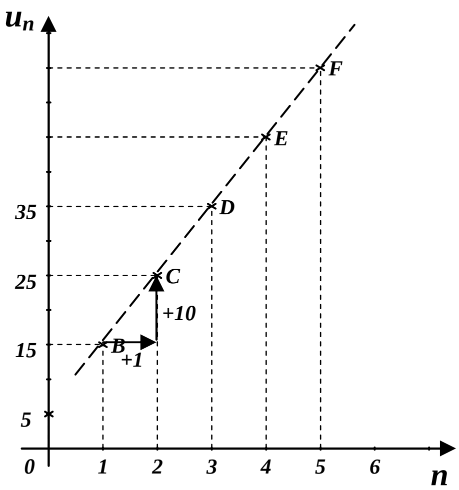
Sur la représentation graphique d'une suite arithmétique, les points sont alignés.

Si la raison est positive, alors la suite est croissante.	Si la raison est négative, alors la suite est décroissante.
Dans ce cas, on peut écrire : $u_{n+1} > u_n$	Dans ce cas, on peut écrire : $u_{n+1} < u_n$

EXERCICE TYPE 2

On a représenté graphiquement ci-contre une suite (u_n) dont le premier terme est u_1.

1. Quelle est la nature de cette suite ?
2. Déterminer graphiquement son premier terme et sa raison.



Solution

1. Comme les points sont alignés, cette suite (u_n) est une suite arithmétique.
2. Graphiquement, on peut déterminer que :

- le premier terme est $u_1 = \mathbf{15}$.

- la raison est $r = \frac{10}{1} = \mathbf{10}$

III. *Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique*

Propriété (admise) Soit (u_n) une suite arithmétique.
On peut déterminer la somme S de termes consécutifs par la formule :

$$\boxed{S = \frac{(\textit{premier terme} + \textit{dernier terme})}{2} \times (\textit{nombre de termes})}$$

EXERCICE TYPE 3

L'entreprise *Math&ST2S* produit des seringues.
Le premier mois, elle a produit 200 seringues, mais l'entreprise arrive à produire 25 seringues de plus chaque mois…
Notons $u_0 = 200$ et u_n le nombre de seringues produites le *n-ième* mois après la 1ère production.

Quelle est le nombre de seringues produites, au total, au bout d'un an après la 1ère production ?

Solution : « 25 seringues de plus chaque mois » : la suite (u_n) augmente du même nombre chaque mois, il s'agit donc d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 200$ et de raison $r = 25$.

Le dernier terme (12 mois après la 1ère production) est $u_{12} = 200 + 12\times25 = 500$.

Entre u_0 et u_{12} , il y a 13 termes…

On a donc : $S = \frac{(\textit{premier terme} + \textit{dernier terme})}{2} \times (\textit{nombre de termes})$

$$S = \frac{(u_0 + u_{12})}{2} \times 13$$

$$S = \frac{(200 + 500)}{2} \times 13 = \frac{700}{2} \times 13 = 350 \times 13 = 4\,550.$$

L'entreprise *Math&ST2S* aura donc produit, au total, 4 550 seringues au bout d'un an après la 1ère production.

Remarques Si le premier terme est u_0 , alors il y a $(n+1)$ termes entre u_0 et u_n .
Donc, par exemple, entre u_0 et u_{12} , il y a *13* termes…

Si le premier terme est u_1 , alors il y a n termes entre u_1 et u_n .