5ème

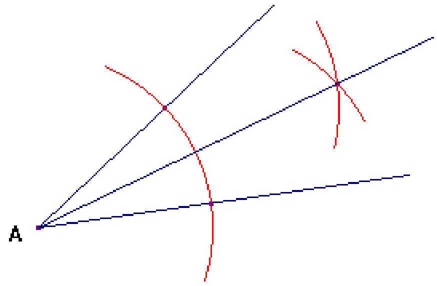
CHAPITRE 6
LES DROITES REMARQUABLES D'UN TRIANGLE

I. Bissectrices d'un triangle

La ***bissectrice d'un angle*** est la droite qui partage cet angle en deux angles de même mesure.
Les ***bissectrices d'un triangle*** sont les bissectrices de chaque angle du triangle.

Construction d'une bissectrice avec le compas

Pour tracer la bissectrice d'un angle de sommet A :



- ☞ On trace un arc de cercle de centre A qui coupe les côtés de l'angle en deux points.
- ☞ A partir de ces deux points, on trace deux autres arcs de cercle de même rayon.
- ☞ On trace la droite passant par le point d'intersection des deux arcs de cercle et par le sommet A.

II. Médiatrices d'un triangle et cercle circonscrit

1. Médiatrice d'un segment

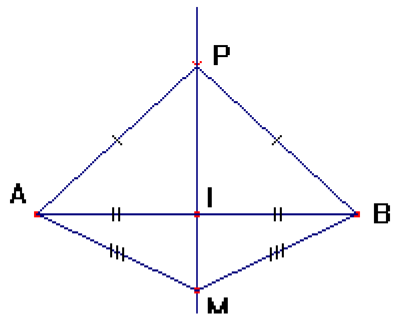
La ***médiatrice d'un segment*** est la droite
- ¤ qui est perpendiculaire à ce segment ;
- ¤ et qui passe par le milieu de ce segment.

Propriétés

- ☞ **Si** un point appartient à la médiatrice d'un segment,
  alors ce point est situé à la même distance (équidistant) des extrémités de ce segment.
- ☞ **Si** un point est équidistant des extrémités d'un segment,
  alors ce point appartient à la médiatrice de ce segment.

Exemple

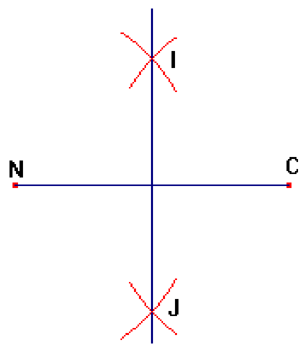
Sur la figure ci-contre, on a : MB = MA ; IA = IB ; PA = PB.
On dit que les points M, I et P sont équidistants des points A et B.
La droite (PM) est donc la médiatrice du segment [AB]



Construction d'une médiatrice avec le compas

Pour tracer la médiatrice d'un segment [NC] :

- ☞ De chaque côté du segment, on trace deux arcs de cercle de même rayon :
  un de centre N et un de centre C
- ☞ Les arcs de cercle se coupent en deux points I et J, équidistants de N et de C :
  la droite (IJ) obtenue est donc la médiatrice du segment [NC].



2. *Cercle circonscrit à un triangle*

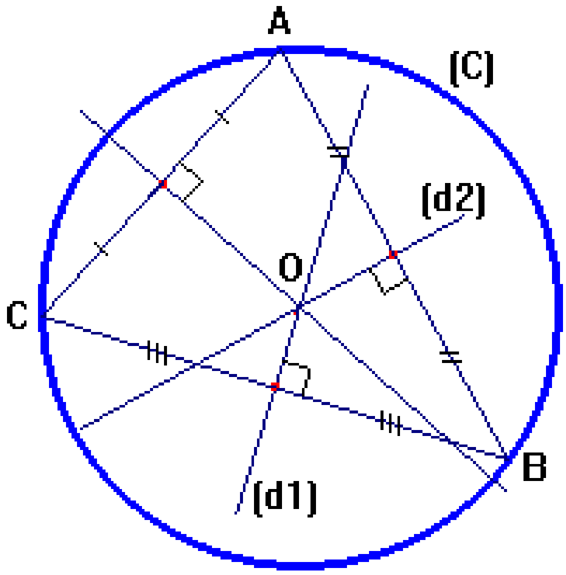
Les ***médiatrices d'un triangle*** sont les médiatrices de chaque côté du triangle.

Théorème et définition

> Dans tout triangle, les trois médiatrices se coupent en un même point.
>
> Ce point est le centre du cercle qui passe par les trois sommets du triangle, appelé ***cercle circonscrit au triangle***.

Preuve du théorème

Considérons un triangle ABC quelconque.



Soit (d1) la médiatrice de [CB] et soit (d2) la médiatrice de [AB].
Notons O le point d'intersection de ces deux médiatrices.

Il nous faut montrer que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC,
Autrement dit, il faut prouver que OA = OB = OC, puis que O appartient aussi à (d3), médiatrice de [AC].

☞ On sait que O appartient à (d1), médiatrice de [CB].
D'après la leçon (paragraphe II.1.), si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.
Donc OC = OB.

☞ De même, on sait que O appartient à (d2), médiatrice de [AB].
D'après la leçon (paragraphe II.1.), si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.
Donc OA = OB.

☞ *Conclusion* : on a donc bien OA = OB = OC, donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

☞ Enfin, on sait que désormais OA = OC.
D'après la leçon (paragraphe II.1.), si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment.
Donc O appartient bien à la médiatrice de [AC].

III. *Hauteurs d’un triangle et aire d’un triangle*

1. *Hauteur d’un triangle*

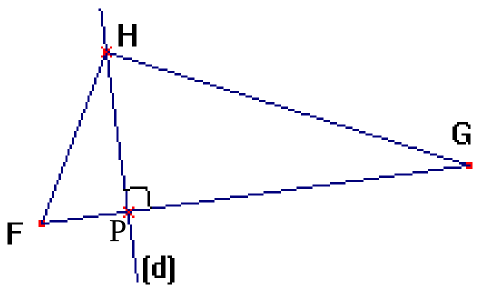
Une ***hauteur d’un triangle*** est une droite :
- ¤ qui passe par un sommet du triangle
- ¤ et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

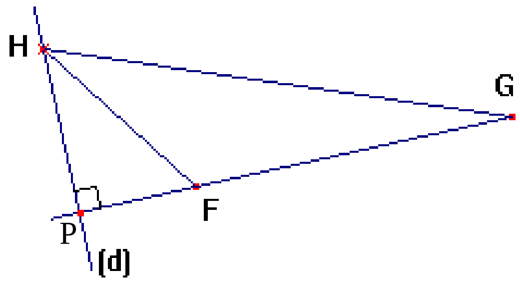
Exemples de construction d’une hauteur avec une équerre

Pour tracer ***la hauteur issue de H*** du triangle FGH :

☞ On repère le côté opposé à H et on y place l’angle droit de l’équerre. *Ici, le côté opposé à H est [FG].*

☞ On fait glisser l’équerre sur ce côté jusqu’à arriver au sommet H.



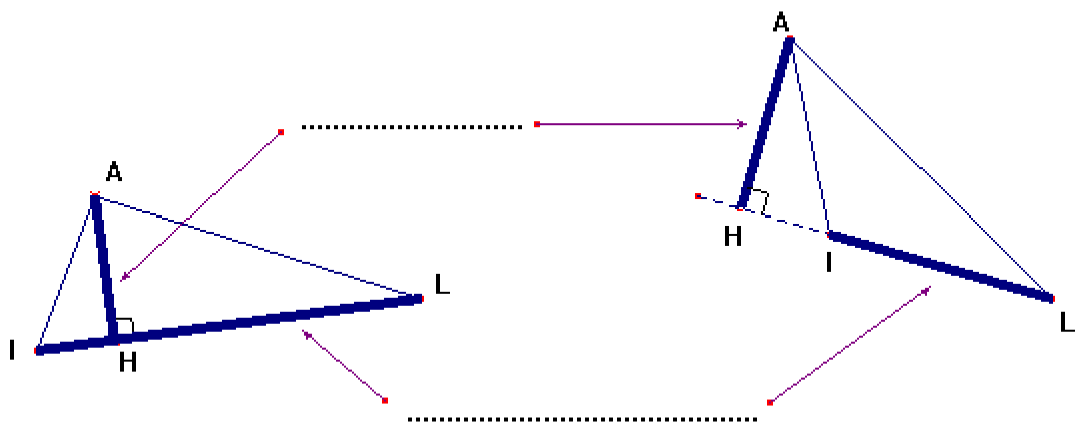


Dans chaque cas : (d) est ***la hauteur issue de H*** du triangle FGH.

Le point P s’appelle le ***pied de la hauteur***.

2. *Aire d’un triangle*

Pour calculer ***l’aire d’un triangle AIL***, on multiplie la longueur d’un côté par la longueur de la hauteur relative à ce côté et on divise ce produit par deux.



Formule $\boxed{\textbf{Aire d'un triangle} = \dfrac{\textbf{base} \times \textbf{hauteur associée}}{\textbf{2}} = \dfrac{\textbf{b} \times \textbf{h}}{\textbf{2}}.}$

Exemple Sur les figures ci-dessus, pour déterminer l’aire d’un triangle AIL,

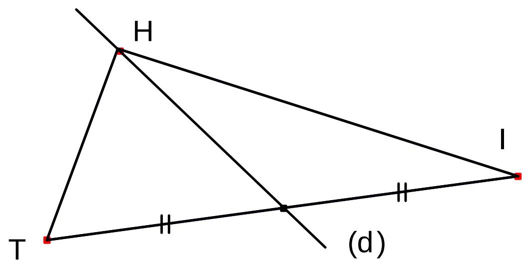
il faut effectuer les calculs : $\text{Aire(AIL)} = \dfrac{\text{IL} \times \text{AH}}{2}$

IV. Médianes d'un triangle

Une ***médiane d'un triangle*** est une droite qui : ¤ passe par un sommet du triangle ;
et passe par le milieu du côté opposé à ce sommet.

Exemple Dans le triangle THI, (d) est la médiane issue du sommet H :

- (d) passe par le sommet H ;
- (d) coupe le côté [IT] opposé à H en son milieu.



Remarque 1 Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point.

Remarque 2 La médiane d'un triangle permet de diviser ce triangle en deux triangles de même aire.