COURS DE MATHEMATIQUES

3ème DP 6h

M LAUNAY

Enseignant au Collège J. Anglade
LEZIGNAN-CORBIERES

prof.launay@wanadoo.fr

Année scolaire 2009-2010

SOMMAIRE

FICHE n°1
1ère partie : Outils statistiques

INTRODUCTION sur les STATISTIQUES
Depuis quand ? Pourquoi ? Et comment ?

Connaissance du passé, connaissance du futur…

- Assiste-t-on à un réchauffement de la planète ?
- Faut-il encore vacciner les enfants contre la variole ?
- Une pièce qui retombe 650 fois sur pile en mille lancers est-elle déséquilibrée ?
- Comment faire pour être « sûr » que dans un lot de 1000 piles électriques vendues, il y en a au moins 980 qui fonctionnent correctement ?
- Fera-t-il beau dimanche ?

Toutes ces questions ont un point commun : elles sont du ***domaine des statistiques***.

Les statistiques dans le temps…

- Les premiers relevés d'hommes et de bien ont eu lieu ***vers 3000 ans avant J.-C. en Mésopotamie*** ;
- ***L'Egypte des pharaons*** organisé régulièrement des recensements notamment pour les impôts ;
- ***Tycho Brahe*** (1546-1601), astronome danois, utilise la moyenne arithmétique pour réduire les erreurs d'observations ;
- Au XVIIIe et XIXe siècle se développe la ***théorie des erreurs*** ;
- Au XXe siècle, les ***ordinateurs*** ont donné une place primordiale aux statistiques car ils permettent de faire de ***nombreuses simulations***.

Les deux points de vue de la statistique

- ***Les recensements*** : ils donnent une image précise de ce que l'on désire observer mais pose des problèmes techniques évident pour le recueil d'un trop grand nombre de données ;
- ***Les sondages sur des échantillons*** : on effectue un recensement sur une partie seulement de la population à étudier et ces sondages présentent donc une incertitude qu'il faut minimiser.

Utilité de la statistique dans le monde contemporain

- ***Trouver et décrire une relation*** : on établit le risque cardio-vasculaire lié au tabac en étudiant le pourcentage de fumeurs chez les cardiaques et le pourcentage de cardiaques chez les fumeurs et les non-fumeurs ;
- ***Prendre une décision*** : l'amélioration annuelle des semences de céréales par croisements successifs, les contrôles de fabrication et de fiabilité dans l'industrie, d'efficacité d'un médicament, etc. sont très dépendants des tests statistiques ;
- ***Prévoir et planifier*** : les statistiques économiques sont publiques et servent de base au négociations syndicales ou inter-gouvernementales.

I. Effectifs et diagramme en bâtons

1. Effectifs

Le tableau ci-contre donne la répartition des ***effectifs*** des élèves dans un collège dont l'***effectif total*** est de 607 élèves.

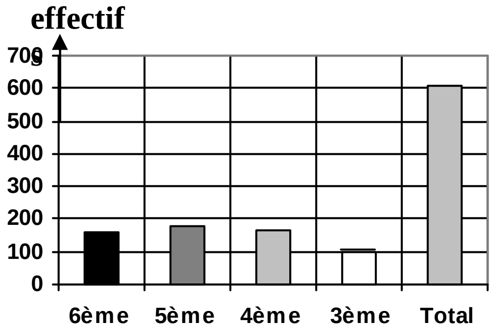
	6ème	5ème	4ème	3ème	Total
EFFECTIFS	162	181	163	101	**607**

<u>Exemple</u>

Dans ce collège, l'effectif des 5èmes est de 181 élèves.

2. Diagramme en bâtons (ou en barres)

On peut représenter ces effectifs par un ***diagramme en bâtons*** (ou en barres) : dans un diagramme en barres, la <u>hauteur de chaque barre</u> est proportionnelle à l'effectif qu'elle représente.



II. Fréquences et diagramme circulaire

1. Fréquences et pourcentages

<u>Définition</u>

$$\textbf{fréquence} = \frac{\textbf{effectif}}{\textbf{effectif total}}.$$

	6ème	5ème	4ème	3ème	Total
Effectifs	162	181	163	101	**607**
Fréquences	0,267	0,298	0,268	0,167	**1**

<u>Exemple</u> La fréquence des élèves de 3ème dans ce collège est **0,167 environ** car $\frac{101}{607} \approx 0{,}167$

<u>Définition</u>

$$\textbf{fréquence en \%} = \frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}} \times \textbf{100}.$$

	6ème	5ème	4ème	3ème	Total
Effectifs	162	181	163	101	**607**
Fréquences (en %)	26,7	29,8	26,8	16,7	**100**

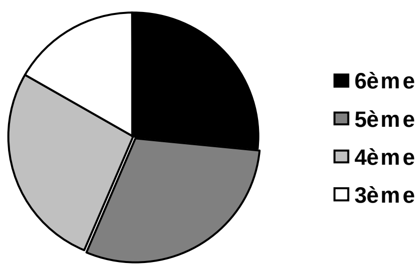
<u>Exemple</u> Le pourcentage de 4ème dans ce collège est 26,8 % environ car $\frac{163}{607} \times 100 \approx 26{,}8$

2. Diagrammes circulaires

	6ème	5ème	4ème	3ème	Total
effectifs	162	181	163	101	**607**
Fréquences	0,267	0,298	0,268	0,167	**1**
Mesures (en degrés)	96	107	97	60	**360**

On peut représenter ces effectifs par un ***diagramme circulaire*** : dans un diagramme circulaire, la <u>mesure de chaque angle</u> est proportionnelle à l'effectif qu'il représente.

$$\textbf{Mesure d'un angle} = \frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}} \times \textbf{360}.$$



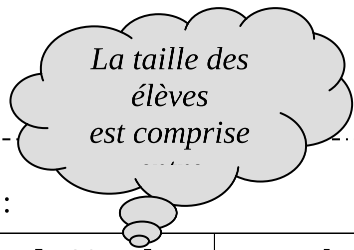
III. *Moyenne arithmétique pondérée d'une série statistique*

EXERCICE TYPE 1 Déterminer la taille moyenne des 10 personnes suivantes :

Taille (en m)	**1,70**	**1,75**	**1,80**	**1,85**	***Total***
Effectif	**3**	**4**	**2**	**1**	**10**

Calculs : **1,70×3 + 1,75×4 + 1,80×2 + 1,85×1 = 17,55**

17,55 ÷ 10 = 1,755



EXERCICE TYPE 2 Déterminer la taille moyenne des élèves de la classe :

Taille (en m)	**[1,50 ; 1,60[**	**[1,60 ; 1,70[**	**[1,70 ; 1,80[**	**[1,80 ; 2[**	***Total***
Centre	(1,50 + 1,60) ÷ 2 = **1,55**	(1,60 + 1,70) ÷ 2 = **1,65**	(1,70 + 1,80) ÷ 2 = **1,75**	(1,80 + 2) ÷ 2 = **1,90**	
Effectif	**3**	**13**	**8**	**2**	**26**

Calculs : **1,55×3 + 1,65×13 + 1,75×8 + 1,90×2** = 43,9

43,9 ÷ 26 ≈ 1,69

IV. *Médiane d'une série statistique*

<u>*Définition*</u> La ***médiane*** d'une <u>série ordonnée</u> est ***une valeur*** telle qu'il y ait ***autant de valeurs inférieures*** ou égales ***que de valeurs supérieures*** ou égales.

EXERCICE TYPE 3 Déterminer les médianes et les moyennes des séries de notes suivantes :
- de la série A : **13, 13, 20, 19, 18, 15, 15**
- de la série B : **8, 8, 9, 12, 15, 17, 12, 11, 14, 14**
- de la série C : **17, 14, 3, 16, 5, 17**

<u>*Remarque*</u> Pour déterminer une médiane, ***il faut d'abord ordonner la série.***

- série A : $\underbrace{13 \leq 13 \leq 15}_{\textit{3 notes}} \leq \boxed{15} \leq \underbrace{18 \leq 19 \leq 20}_{\textit{3 notes}}$. La médiane de cette série est **15**.

- série B : $\underbrace{8 \leq 8 \leq 9 \leq 11 \leq 12}_{\textit{5 notes}} \leq \underbrace{12 \leq 14 \leq 14 \leq 15 \leq 17}_{\textit{5 notes}}$. La médiane de cette série est **12**.

- série C : $\underbrace{3 \leq 5 \leq 14}_{\textit{3 notes}} \leq \underbrace{16 \leq 17 \leq 17}_{\textit{3 notes}}$. La médiane de cette série doit être comprise entre 14 et 16.
Par convention, on prendra la valeur **15** pour ***médiane*** de cette série.

Bilan :

	Série A	Série B	Série C
Médiane	**15**	**12**	**15**
Moyenne	**≈ 16,1**	**12**	**12**

<u>*Remarques*</u> : - Deux séries peuvent avoir la même moyenne mais pas la même médiane (séries B et C).
- Deux séries peuvent avoir la même médiane mais pas la même moyenne (séries A et C).

V. *Quartiles d'une série statistique*

<u>*Définition*</u> Le ***1er quartile*** est la plus petite valeur $\mathbf{Q_1}$ de la <u>série ordonnée</u> telle qu'au moins 25 % (ou un quart) des données sont inférieures ou égales à $\mathbf{Q_1}$.

Le ***3ème quartile*** est la plus petite valeur $\mathbf{Q_3}$ de la <u>série ordonnée</u> telle qu'au moins 75 % (ou trois quarts) des données sont inférieures ou égales à $\mathbf{Q_3}$.

EXERCICE TYPE 4 Déterminer le 1er quartile et le 3ème quartile de la série de notes suivante :

3 ; 14 ; 12 ; 8 ; 19 ; 17 ; 7 ; 10 ; 6 ; 8 ; 17 ; 14

<u>*Remarques*</u>

¤ Pour déterminer une médiane, ***il faut d'abord ordonner la série.***

¤ Pour chercher les quartiles, on partage la série en ***quatre groupes de même effectif***.

1. Je range la série dans l'ordre croissant :	$\mathbf{3 \leq 6 \leq 7 \leq 8 \leq 8 \leq 10 \leq 12 \leq 14 \leq 14 \leq 17 \leq 17 \leq 19}$. ***3 notes*** ***3 notes*** ***3 notes*** ***3 notes***
2. Je compte le nombre de ***n*** valeurs :	Il y a **12** valeurs.
3. Je divise ***n* par 4** :	12 ÷ 4 = **3**
4. J'en déduis le rang du 1er quartile :	Le **1er quartile** est donc la **3ème valeur .**
J'en déduis le rang du 3ème quartile :	Le **3ème quartile** est donc la **9ème valeur .**
5. J'écris le 1er quartile et le 3ème quartile :	$\mathbf{Q_1 = 7}$ **et** $\mathbf{Q_3 = 14}$
Remarque :	*La médiane de cette série est 11.*

VI. *L'étendue*

<u>*Définition*</u> L'***étendue*** d'une série est la différence entre les deux valeurs extrêmes de cette série.

EXERCICE TYPE 5 Déterminer l'étendue des séries A, B et C suivantes :

- de la série A : **13, 13, 20, 19, 18, 15, 15**
- de la série B : **8, 8, 9, 12, 15, 17, 12, 11, 14, 14**
- de la série C : **17, 14, 3, 16, 5, 17**

- série A : **20 – 13 = 7** . L'étendue de cette série est **7**.

- série B : **17 – 8 = 11** . L'étendue de cette série est **11**.

- série A : **17 – 3 = 14** . L'étendue de cette série est **14**.

FICHE n°1

2ème partie : Notion de probabilités

FICHE n°2
Résoudre des problèmes de vitesse

A savoir

- Il faut connaître la formule : $\boxed{\textbf{v}\text{itesse} = \dfrac{\textbf{d}\text{istance}}{\textbf{t}\text{emps}}}$ *Pour s'en rappeler :* $km/h = \dfrac{km}{h}$
- L'unité de vitesse **km/h** se note aussi $\mathbf{km.h^{-1}}$ et **m/s** se note aussi $\mathbf{m.s^{-1}}$

I. Calculer une vitesse

Problème n°1

Un cycliste parcourt 97 km en 3 h 30 min.
Quelle est sa vitesse moyenne sur ce parcours ?

Solution Il faut connaître la formule : $\boxed{\textbf{v}\text{itesse} = \dfrac{\textbf{d}\text{istance}}{\textbf{t}\text{emps}}}$ *Pour s'en rappeler :* $km/h = \dfrac{km}{h}$

Dans ce problème, la distance est **d** = 97 km

le temps est **t** = 3 h 30 min = 3,5 h

Donc : $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{t}} = \dfrac{97}{3{,}5} \approx 27{,}7$ km/h

Conclusion : Le cycliste a eu une vitesse moyenne de 27,7 km/h environ.

II. Calculer un temps

Problème n°2

Un randonneur parcourt 13 km à environ 4 km/h.
En combien de temps a-t-il réalisé ce parcours ?

Solution A partir de la formule : $\textbf{v}\text{itesse} = \dfrac{\textbf{d}\text{istance}}{\textbf{t}\text{emps}}$

Produit en **croix**

On remplace : $4 = \dfrac{13}{\mathbf{t}}$ ou encore $\dfrac{4}{1} = \dfrac{13}{\mathbf{t}}$

On utilise le produit en croix : $4\times\mathbf{t} = 13\times1$

Donc : $\mathbf{t} = \dfrac{13\times1}{4} = 3{,}25$ h

Enfin, on convertit : **t** = 3,25 h = 3 h 15 min *(3 heures et un quart d'heure)*

Conclusion : Le randonneur a parcouru les 13 km en 3 h 15 min.

III. Calculer une distance

Problème n°3

> Un camion roule pendant 3 h 45 min à 90 km/h.
> Quelle distance a-t-il parcourue ?

Solution **Attention**, il faut **convertir les temps** dans **une seule** et même **unité** : **t** = 3 h 45 min = 3,75 h

A partir de la formule : $\textbf{v}\text{itesse} = \dfrac{\textbf{d}\text{istance}}{\textbf{t}\text{emps}}$

Produit en **croix**

On remplace : $90 = \dfrac{\mathbf{d}}{3{,}75}$ ou encore $\dfrac{90}{1} = \dfrac{\mathbf{d}}{3{,}75}$

On utilise le produit en croix : $90 \times 3{,}75 = \mathbf{d} \times 1$

Donc : $\mathbf{d} = 90 \times 3{,}75 = 337{,}5$ km

Conclusion : Le camion a parcouru 337,5 km.

IV. Changer d'unité de vitesse

Problème n°4

> La VMA est la Vitesse Maximale Aérobique, vitesse obtenue lors du test de l'effort effectué en E.P.S en début d'année scolaire.
> Elle détermine en quelque sorte votre « capacité respiratoire et sportive »...
>
> ***a-*** La Vitesse Maximale Aérobique à 100% de Thibaut est 9 km.h^{-1}.
> Quelle est sa VMA en m.s^{-1} ?
>
> ***b-*** La VMA à 100% de Baptiste est 2 m.s^{-1}.
> Quelle est sa VMA en km.h^{-1} ?

Solution ***a-*** 9 km.h^{-1}

$\times \dfrac{1\,000}{3\,600}$

signifie : 9 km en 1 h.

On convertit les unités en m et en s.

soit : 9 000 m en 3 600 s.

On divise donc la distance par 3 600…

soit : $\dfrac{9\,000}{3\,600}$ m en 1 s.

On calcule : $\dfrac{9\,000}{3\,600} = 2{,}5$

Conclusion : *9 km.h^{-1}= 2,5 m.s^{-1}. Autrement dit, la VMA de Thibaut est de 2,5 m.s^{-1}.*

b- 2 m.s^{-1}

$\times \dfrac{3\,600}{1\,000}$

signifie : 2 m en 1 s.

On multiplie la distance par 3600 car 1 h = 3 600 s.

soit : 7 200 m en 3 600 s.

On convertit les unités en km et en h.

soit : $\dfrac{7\,200}{1\,000} = 7{,}2$ km en 1 h.

Conclusion : *2 m.s^{-1} = 7,2 km.h^{-1}=. Autrement dit, la VMA de Thibaut est 7,2 km.h^{-1}.*

FICHE n°3
Utiliser l'échelle d'un dessin

<u>*A savoir*</u> $\textbf{échelle} = \dfrac{\text{longueur sur le } \textbf{dessin}}{\text{longueur } \textbf{réelle}}$

- Si l'échelle est ***inférieur à 1***, le dessin est une ***réduction***.
- Si l'échelle est ***supérieur à 1***, le dessin est un ***agrandissement***.

I. Utiliser une échelle donnée

<u>Problème n°1</u>

Un plan représente une maison à l'échelle $\dfrac{1}{25}$.

a- Cette maison mesure 9 m de long. Quelle sera la dimension sur le dessin de cette longueur ?

b- Sur le plan, la salle à manger est un rectangle de longueur 20 cm et de largeur 14 cm. Quelles sont les dimensions réelles de cette salle à manger ?

<u>*Solution*</u> Pour mieux comprendre le problème, on réalise un tableau de proportionnalité :

	ECHELLE	Longueur de la maison	Longueur de la salle à manger	Largeur de la salle à manger
Dimensions sur le plan	**1**	**?**	**20 cm**	**14 cm**
Dimensions réelles	**25**	**9 m**	**?**	**?**

a- J'utilise le produit en croix : $\dfrac{9 \times 1}{25} = 0{,}36$.

La longueur de la maison sera représentée sur le dessin par une longueur de 0,36 m, soit **36 cm**.

b- J'utilise le produit en croix : $\dfrac{20 \times 25}{1} = 500$.

La longueur réelle de la salle à manger est 500 cm, soit **5 m**.

J'utilise le produit en croix : $\dfrac{14 \times 25}{1} = 350$.

La largeur réelle de la salle à manger est 350 cm, soit **3,5 m**.

II. Déterminer l'échelle d'un dessin

Problème n°2

Une étude mécanique représente une réduction de voiture de 3,2 m par un croquis de 8 cm.

Quelle est l'échelle de cette réduction ?

Solution ATTENTION ! il faut d'abord convertir les unités dans la même unité : **3,2 m = 320 cm**

Utilisons un tableau de proportionnalité :

	ECHELLE	Taille de l'abeille
Dimensions sur le plan	**1**	**8 cm**
Dimensions réelles	**?**	**320 cm**

J'utilise le produit en croix : $\frac{320 \times 1}{8} = 40$

L'échelle de cette réduction est $\frac{1}{40}$.

FICHE n°4
Diviseurs d'un nombre entier et PGCD

I. Qu'est ce qu'un diviseur ? un multiple ?

Exemple 7 est un diviseur de 91 car $91 = 7 \times 13$ ou encore car $91 \div 7 = 13$ (division *sans reste*)
On peut alors également dire que 13 est un diviseur de 91…

Vocabulaire
91 est ***divisible par*** 7
91 est un ***multiple*** de 7
7 est un ***diviseur*** de 91
7 ***divise*** 91

signifient

Il existe un nombre entier k
tel que : $91 = 7 \times k$
(dans cet exemple, $k = 13$)

Remarques 1 est diviseur de tout nombre entier n car $n = 1 \times n$.
Tout nombre entier n est un diviseur de 0 car $n \times 0 = 0$

Exemples Les diviseurs de 18 sont :

1	18
2	9
3	6

Les diviseurs de 42 sont :

1	42
2	21
3	14
6	7

II. Les critères de divisibilité

Rappel de 6ème

Un nombre entier est :

- ***divisible par 2*** si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- ***divisible par 5*** si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- ***divisible par 3*** si la somme de ces chiffres est divisible par 3 ;
- ***divisible par 9*** si la somme de ces chiffres est divisible par 9 ;
- ***divisible par 4*** si le nombre formé par ses deux derniers chiffres (à droite) est divisible par 4.

Exemples Parmi les entiers suivants : 19 ; 25 ; 27 ; 40 ; 132 ; 133 ; 246 ; 2 385 ; 17 124

- les entiers divisible par 2 sont : 4**0** ; 13**2** ; 24**6** ; 17 12**4**
- les entiers divisible par 5 sont : 2**5** ; 2 38**5**
- les entiers divisible par 3 sont : 27 ; 246 ; 2 385 ; 17 124
- les entiers divisible par 9 sont : 27 ; 2 385
- les entiers divisible par 4 sont : 1**32** ; 17 1**24**

1+7+1+2+4 = 15
Et 15 est dans la table de 3…

2+3+8+5 = 18
Et 18 est dans la table de 9…

III. Diviseurs communs et PGCD

Définition Un ***diviseur commun*** à deux nombres entiers est un nombre entier qui divise chacun d'eux.
Le **P**lus **G**rand **C**ommun **D**iviseur de deux nombres entiers est appelé le ***PGCD*** de ces nombres.

Exemple

- ✓ **9** est un diviseur commun à 36 et 54 car $36 = \mathbf{9} \times 4$ et $54 = \mathbf{9} \times 6$
- ✓ Cherchons tous les autres diviseurs communs de 36 et 54.

Les diviseurs de 36 sont :

1	36
2	**18**
3	12
4	**9**
6	6

Les diviseurs de 54 sont :

1	54
2	27
3	**18**
6	**9**

Donc les diviseurs communs à 36 et 54 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 et **18**.

- ✓ Le PGCD de 36 et 54 est donc **18**.

Définition On dit que ces nombres sont ***premiers entre eux***, lorsque leur seul diviseur commun est 1.
Cela revient à dire aussi que le PGCD de ces deux nombres est 1.

IV. Rendre une fraction irréductible en utilisant le PGCD

Définition Une ***fraction irréductible*** est une fraction « simplifiée le plus possible ».

Autrement dit Pour rendre une fraction irréductible, il faut diviser le numérateur et le dénominateur par un même nombre qui doit être le plus grand possible… c'est-à-dire par le PGCD du numérateur et le dénominateur…

Exemple Transformons la fraction $\frac{102}{238}$ en une fraction irréductible.

Les diviseurs de 102 sont :

1	102
2	51
3	**34**
6	**17**

Les diviseurs de 238 sont :

1	238
2	119
7	**34**
14	**17**

Les diviseurs communs à 102 et 238 sont : 1 ; 2 ; 17 et 34 et le PGCD de 102 et 238 est 34.

On simplifie donc la fraction par 34 : $\frac{102}{238} = \frac{3 \times 34}{7 \times 34} = \frac{3}{7}$.

Conclusion : $\mathbf{\frac{3}{7}}$ **est la fraction irréductible égale à** $\mathbf{\frac{102}{238}}$.

V. *L'algorithme d'Euclide : pour déterminer le PGCD de deux nombres entiers*

L'***ALGORITHME d'EUCLIDE*** est une suite de divisions euclidiennes qui permettent de retrouver le PGCD de deux nombres entiers.

Dans cet algorithme, *le PGCD est toujours le dernier reste non nul trouvé*.

Remarque On utilise plutôt l'algorithme d'Euclide pour les « grands » nombres…

Exemple Déterminons le PGCD de 1 053 et 325 avec l'algorithme d'Euclide :

1 053	**325**	**78**	← **1 053** = **325** × 3 + **78** (*1ère étape*)
325	**78**	**13**	← **325** = **78** × 4 + **13** (*2ème étape*)
78	**13**	**0**	← **78** = **13** × 6 + **0** (*3ème étape*)

Conclusion : **Le PGCD de 1 053 et de 325 est donc 13**.

Remarque Avec l'algorithme d'Euclide, on sait que le PGCD de 1 053 et de 325 est donc 13.

On peut donc transformer la fraction $\frac{325}{1\,053}$ en une fraction irréductible :

$$\frac{325}{1\,053} = \frac{325 \div 13}{1\,053 \div 13} = \frac{25}{81}$$

$\frac{25}{81}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{325}{1\,053}$.

FICHE n°5
Organiser un calcul avec des nombres relatifs et des fractions

I. Organiser et effectuer un calcul complexe

Les règles de calcul à connaître

- Dans un calcul sans parenthèses avec uniquement des additions et soustractions, on effectue les calculs **de gauche à droite**.
- Dans un calcul sans parenthèses avec uniquement des multiplications et divisions, on effectue les calculs **de gauche à droite**.
- Dans un calcul sans parenthèses, on effectue **les multiplications et les divisions en priorité** sur les additions et les soustractions.
- Dans un calcul avec parenthèses, on effectue **d'abord les calculs entre parenthèses**.
- S'il y plusieurs parenthèses, on commence par **les parenthèses plus « intérieures »**.
- Pour calculer des expressions de la forme $\frac{3,9}{2+4}$ ou $\frac{5,1+2,3}{10}$ ou $\frac{10+2}{2+4}$,
  il faut **d'abord calculer le « numérateur » ou le « dénominateur »**.
- Dans un calcul avec des carrés ou des cubes, il faut commencer par calculer ces carrés ou ces cubes.

Exemples

$$\begin{aligned} & \underline{39-8}+12 \\ =\ & 31 + 12 \\ =\ & 43 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underline{30 \div 2} \times 3 \\ =\ & 15 \times 3 \\ =\ & 45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 7+2\times\underline{3^2} \\ =\ & 7+\underline{2\times 9} \\ =\ & 7+18 \\ =\ & 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\underline{7+2})\times 3 \\ =\ & 9\times 3 \\ =\ & 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (7+\underline{3\times 8})\times\left(9-\frac{6}{2}\right) \\ =\ & (\underline{7+24})\times(\underline{9-3}) \\ =\ & 31 \times 6 \\ =\ & 186. \end{aligned}$$

Exemple détaillé

$\big(5\times(\underline{7+3})+2\big)\times 3$ $= \big(\underline{5\times 10} + 2\big)\times 3$ *Je calcul les parenthèses les plus « intérieures »*

$= (\underline{50 + 2})\times 3$ *Dans les parenthèses, je commence par la multiplication*

$= 52 \times 3$ *J'effectue le calcul dans les parenthèses*

$= 156$ *Et on termine le calcul…*

II. *Effectuer un calcul avec deux nombres relatifs*

1. *Additionner deux nombres relatifs*

Méthode

Pour **additionner** deux nombres relatifs :

- Si les deux nombres sont de **même signe** : → on écrit le signe des deux nombres ; → puis on écrit leur **somme**.

- Si les deux nombres sont de **signe différent** : → on écrit le signe du nombre **« le plus lourd »** ; → puis on écrit leur **différence**.

Exemples Si les deux nombres sont de ***même signe*** : (+ 4) + (+ 2) = (+ 6) ; (−3) + (−7) = (– 10)

Si les deux nombres sont de ***signe contraire***: (+ 4) + (– 2) = (+ 2) ; (+3) + (−7) = (– 4)

2. *Soustraire un nombre relatif*

Méthode

Pour **soustraire** un nombre relatif, on **ajoute son opposé**.

Exemples

(+ 5) **– (+ 2)**
= (+ 5) **+ (– 2)** = (+ 3) ;

(+ 6) **– (− 7)**
= (+ 6) **+ (+ 7)** = (+ 13)

L'opposé de (+ 2) est (– 2) et l'opposé de (− 7) est (+ 7)

3. *Multiplier ou diviser deux nombres relatifs*

Méthode

Pour **multiplier** ou **diviser** deux nombres relatifs, on effectue le produit ou le quotient,
puis on applique la ***règle des signes*** :

- Si deux nombres sont de **même signe**, alors le **produit** est **positif** (+).
- Si deux nombres sont de **signes différents**, alors le **produit** est **négatif** (−).

Exemples Si les deux nombres sont de ***même signe*** : (– 3) × (– 8) = (+ 24) ; (+ 6) ÷ (+ 2) = (+ 12)

Le résultat est positif (+)

Si les deux nombres sont de ***signe contraire***: (+ 7) × (– 9) = (– 63) ; (– 15) ÷ (+ 3) = (– 5)

Le résultat est négatif (–)

Remarque **ATTENTION de ne pas confondre l**es règles pour l'addition avec celles de la multiplication.

III. *Effectuer un calcul avec deux fractions*

1. *Additionner ou soustraire deux fractions*

Méthode

Pour **additionner** (ou **soustraire**) des fractions : → on les écrit **avec le même dénominateur** ;
→ on ajoute (ou soustrait) uniquement les numérateurs.

Exemples

$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \frac{2}{9}$

$= \frac{1\times\mathbf{3}}{3\times\mathbf{3}} + \frac{2}{9}$

$= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{9}} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$

$\frac{10}{15} - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$

$= \frac{10}{15} - \frac{2\times\mathbf{3}}{5\times\mathbf{3}}$

$= \frac{10}{15} - \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{15}} = \frac{4}{15}$

$\frac{4}{6} + \frac{7}{15}$

$= \frac{4\times\mathbf{5}}{6\times\mathbf{5}} + \frac{7\times\mathbf{2}}{15\times\mathbf{2}}$

$= \frac{20}{30} + \frac{14}{30} = \frac{34}{30} = \frac{17}{15}$

multiples de 6 : 6 ; 12 ; 18 ; 24 ; **30** ; 36
multiples de 15 : 15 ; **30**
➔ Le dénominateur commun est 30 !

Ne pas oublier de simplifier la fraction !

2. *Multiplier deux fractions*

Méthode

Pour **multiplier** deux fractions : → on applique la règle des signes pour trouver le signe du résultat ;
→ on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Exemples

$\frac{7}{4} \times \frac{8}{-3} = -\frac{7\times 8}{4\times 3} = -\frac{7\times \mathbf{4}\times 2}{\mathbf{4}\times 3} = -\frac{14}{3}$; $\mathbf{-}\,2 \times \frac{-5}{3} = +\frac{2}{1}\times\frac{5}{3} = \frac{10}{3}$

Penser à **simplifier avant de multiplier**…

3. *Diviser par une fraction*

Méthode

Pour **diviser** par une fraction, on **multiplie par son inverse**.

Exemples

$-\frac{5}{7} \div \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$; $\frac{5}{7} \div \mathbf{4}$

$= -\frac{5}{7} \times \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} = -\frac{20}{21}$; $= \frac{5}{7} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = \frac{5}{28}$

L'inverse de $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ est $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$ et l'inverse de **4** est $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

4. *Remarque*

ATTENTION de ne pas oublier de simplifier les fractions lorsque cela est possible :

- **avant de multiplier** pour éviter de « compliquer » les calculs ;
- et à la fin d'un calcul.

FICHE n°6

Calculer avec des pourcentages

En cours de réalisation…

Projet :

I. Le pourcentage d'un tout

a. Calculer le pourcentage d'un nombre

b. Déterminer un pourcentage

II. Pourcentage d'augmentation ou de diminution

a. Appliquer un pourcentage d'augmentation

b. Appliquer un pourcentage de diminution

• Prendre t % d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par $\frac{t}{100}$.

Exemple : Pour calculer une réduction de 30 % sur un prix de 20 €, on calcule

$$20 \times \frac{30}{100} = 6.$$

La réduction est de 6 €.

• Appliquer un pourcentage d'augmentation

Augmenter un prix x de t % revient à multiplier par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$ l'ancien prix x.

Le nouveau prix est : $\left(1 + \frac{t}{100}\right) \times x$.

Exemple : Si un litre d'essence à 1,05 € subit une inflation de 1,2 %.
Le nouveau prix du litre d'essence est :

$$1,05 \times \left(1 - \frac{1,2}{100}\right) = 1,05 \times 1,012 = 1,0626.$$

- Appliquer un pourcentage de diminution :

Diminuer un prix x de t % revient à multiplier ce prix par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$

Le nouveau prix : $x \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)$.

Exemple : Liquidation totale dans un magasin.
-60 % sur tous les articles.
Soit x le prix d'un article.
Exprimer en fonction de x, le prix $f(x)$ de cet article après la réduction.

Solution : Le nouveau prix après la réduction est
$$f(x) = x \times \left(1 - \frac{60}{100}\right) = x \times 0,4$$
$$f(x) = 0,4x.$$

Remarque : la fonction f est une fonction linéaire.

FICHE n°7

Calculer une expression littérale pour un nombre donné

I. Ecritures et notations

Afin d'alléger les écritures, on peut parfois ne pas écrire le signe × dans les calculs.

Exemples

- « $3 \times (5 + y)$ » s'écrit « $3(5 + y)$ »
- « $5 \times a$ » s'écrit « $5a$ »
- « $a \times b$ » s'écrit « ab »
- « $3 \times c \times 5$ » s'écrit « $3 \times 5 \times c$ » soit « $15c$ »

Remarque Par contre, **en aucun cas** « 4×7 » ne peut être simplifié en « 47 » !

II. Calculer le carré et le cube d'un nombre

Définition Le **carré** d'un nombre x est $x \times x$. Il est noté x^2 et se dit « x au carré »
Le **cube** d'un nombre x est $x \times x \times x$. Il est noté x^3 et se dit « x au cube »

Exemples $13^2 = 13 \times 13 = 169$ $20^3 = 20\times20\times20 = 8\,000$
$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$ $(-1)^3 = (-1)\times(-1)\times(-1) = -1$

Les carrés à connaître $1^2 = 1$ $2^2 = 4$ $3^2 = 9$ $4^2 = 16$ $5^2 = 25$
$6^2 = 36$ $7^2 = 49$ $8^2 = 64$ $9^2 = 81$ $10^2 = 100$

Les cubes à connaître $1^3 = 1$ $2^3 = 8$ $3^3 = 27$ $5^3 = 125$ $10^3 = 1\,000$

III. Calculer une expression littérale pour un nombre donné

Problème n°1 **Volume d'un cylindre**

On rappelle que le volume d'un cylindre est donné par la formule : $\mathbf{V} = \pi \mathbf{R}^2 \mathbf{h}$
où **V** est le volume du cylindre, **R** est le rayon de la base et **h** la hauteur du cylindre.

Quel est le volume d'un cylindre de diamètre 10 cm et de hauteur 15 cm ? *Arrondir au cm³ près.*

Solution

Si le diamètre est 10 cm, alors le rayon est 5 cm.
D'après l'énoncé, on a donc : **R** = 5 cm et **h** = 15 cm.

On écrit la formule : $\mathbf{V} = \pi \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{h}$

On remplace : $\mathbf{V} = \pi \times 5^2 \times 15 = 1\,178.$

On calcule : $\mathbf{V} = 1\,178.$

On conclut : ***Le volume de ce cylindre est 1 178 cm³ environ.***

IV. Utiliser une expression littérale pour déterminer un nombre inconnu

Problème n°2 **Concentration chimique**

On analyse deux récipients de 5 litres d'eau.

a- L'analyse du 1^{er} récipient indique 125 mg de magnésium.

Quelle est, en g/L, la concentration de magnésium dans ce 1^{er} récipient ?

b- L'analyse du $2^{ème}$ récipient indique une concentration de 0,04 g/L.

Quelle est, en g, la masse de magnésium dans ce $2^{ème}$ récipient ?

Solution Rappel : $\textbf{C}\text{oncentration} = \dfrac{\textbf{m}\text{asse}}{\textbf{V}\text{olume}}$

a- On convertit d'abord les unités : 125 mg = 0,125 g.

D'après l'énoncé, on a donc : **m** = 0,125 g et **V** = 5 L.

On écrit la formule : $\mathbf{C} = \dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{V}}$

On remplace : $\mathbf{C} = \dfrac{0{,}125}{5}$.

On calcule : $\mathbf{C} = 0{,}025$.

On conclut : ***La concentration de magnésium dans ce 1^{er} récipient est de 0,025 g/L.***

b- D'après l'énoncé, on a : **C** = 0,04 g/L et **V** = 5 L.

On écrit la formule : $\mathbf{C} = \dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{V}}$ Produit en **croix**

On remplace : $0{,}04 = \dfrac{\mathbf{m}}{5}$ ou encore $\dfrac{0{,}04}{1} \bowtie \dfrac{\mathbf{m}}{5}$

On calcule : $\mathbf{m} = \dfrac{5 \times 0{,}04}{1} = 0{,}2$

On conclut : ***La masse de magnésium dans ce $2^{ème}$ récipient est de 0,2 g , soit 200 mg.***

V. Calculer la racine carrée d'un nombre positif

FICHE n°8
Transformer une expression littérale.

Définition **Développer** un produit, c'est le ***transformer en somme ou différence***.

Réduire une somme, c'est l'écrire avec le moins de termes possibles (en respectant bien sûr les règles de calcul…)

Factoriser une somme ou une différence, c'est la ***transformer en produit***.

I. *La distributivité simple*

Propriété Pour n'importe quels nombres (positifs ou négatifs) que les lettres **a**, **b** et **c** remplacent, on a :

$$\boxed{a(b+c) = ab + ac}.$$

produit somme

Exemple Développer puis réduire les deux expressions suivantes :

$E = -2(3x + 1)$

$E = (-2)\times 3x + (-2)\times 1$

$E = -6x - 2$

$F = 3(2x - 5)$

$F = 3\times 2x + 3\times(-5)$

$F = 6x - 15$

II. *La distributivité double*

La distributivité double

Propriété Pour n'importe quel nombre (positif ou négatif) que les lettres **a**, **b** et **c** remplacent, on a :

$$\boxed{(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd}.$$

produit sommes

Exemples Développer puis réduire les quatre expressions suivantes :

$G = (3x + 1)(2x + 5)$

$G = 3x \times 2x + 3x \times 5 + 1 \times 2x + 1 \times 5$

$G = 6x\times x + 15x + 2x + 5$

$G = 6x^2 + 17x + 5$

$H = (-x + 3)(5x - 2)$

$H = (-x) \times 5x + (-x) \times (-2) + 3 \times 5x + 3 \times (-2)$

$H = -5x\times x + 2x + 15x + (-6)$

$H = -5x^2 + 17x - 6$

$I = (x - 9)^2$

$I = (x - 9)(x - 9)$

$I = x\times x + x \times (-9) + (-9) \times x + (-9) \times (-9)$

$I = x^2 - 9x - 9x + 81$

$I = x^2 - 18x + 81$

$L = (3x + 5)^2$

$L = (3x + 5)(3x + 5)$

$L = 3x \times 3x + 3x \times 5 + 5 \times 3x + 5 \times 5$

$L = 9x^2 + 15x + 15x + 25$

$L = 9x^2 + 30x + 25$

FICHE n°9
Résoudre une équation

I. Qu'est ce qu'une « équation » ? Qu'est ce que « résoudre une équation » ?

Une équation est une égalité dans laquelle intervient un ***nombre inconnu*** désigné par une lettre.

Résoudre une équation d'inconnue x, c'est trouver par quel**(s)** nombre**(s)** il faut remplacer x pour que l'égalité soit vraie.
Ces nombres sont appelés ***solutions*** de l'équation.

Exemple Le nombre (–1) est-il solution de l'équation : $x^2 = -5x - 6$? Et le nombre (–2) ?

- **Pour $x = -1$** : $x^2 = (-1)^2 = \boxed{+1}$
  $-5x - 6 = -5\times(-1) - 6 = 5 - 6 = \boxed{-1}$

  Comme $+1 \neq -1$, (–1) n'est donc pas une solution de l'équation $x^2 = -5x - 6$.

- **Pour $x = -2$** : $x^2 = (-2)^2 = \boxed{4}$
  $-5x - 6 = -5\times(-2) - 6 = 10 - 6 = \boxed{4}$

  Comme le résultat est identique dans les deux membres de l'égalité,
  (–2) est donc une solution de l'équation $x^2 = -5x - 6$.

II. Résoudre une équation de la forme $\frac{3}{4} = \frac{7}{x}$ ou $\frac{x}{4} = \frac{9}{10}$

Méthode Pour résoudre des équations de la forme $\frac{3}{11} = \frac{x}{99}$ ou $\frac{3}{4} = \frac{7}{x}$ ou $\frac{x}{4} = \frac{9}{10}$,
on utilise la proportionnalité :

- On vérifie d'abord qu'il n'existe pas à un *coefficient de proportionnalité* simple (avec le calcul mental)
- Sinon, on utilise le *produit en croix* (ou *règle de trois*).

Exemple 1 Si $\frac{3}{11} = \frac{x}{99}$, alors $x = 3 \times 9 = \mathbf{27}$

Exemple 2 Si $\frac{42}{15} = \frac{7}{x}$, alors $x = 15 \div 6 = \frac{15}{6} = \mathbf{2{,}5}$

Exemple 3 Si $\frac{3}{4} = \frac{7}{x}$, alors $3 \times x = 7 \times 4$ donc $x = \frac{7\times4}{3} = \mathbf{\frac{28}{3}}$

III. *Transformer une égalité pour résoudre une équation*

Pour résoudre une équation, on la transforme par étapes pour obtenir une équation de la forme "$\boldsymbol{x} = \mathbf{a}$" (où a est un nombre). Pour qu'à chaque étape les équations obtenues aient les mêmes solutions, on utilise les deux règles suivantes :

Règles

On conserve une égalité lorsque :

- ☞ On ajoute ou soustrait un même nombre aux deux membres d'une égalité ;
- ☞ On multiplie ou divise par un même nombre (différent de 0) les deux membres d'une égalité.

Exemple détaillé Résoudre l'équation $3x + 1 = 7x - 2$.

☞ Pour « regrouper les x » dans un même membre, on soustrait $3x$ à chaque membre de l'égalité :

$$3x + 1 \mathbf{- 3\boldsymbol{x}} = 7x - 2 \mathbf{- 3\boldsymbol{x}}$$

On réduit : $1 = 4x \mathbf{- 2}$

☞ De la même manière, on ajoute 2 à chaque membre de l'égalité :

$$1 \mathbf{+ 2} = 4x - 2 \mathbf{+ 2}$$

On réduit : $3 = \mathbf{4}x$

☞ On divise par 4 chaque membre de l'égalité :

$$3 \div \mathbf{4} = 4x \div \mathbf{4}$$

On obtient : $\frac{3}{4} = x$ ou encore $x = \frac{3}{4}$

Conclusion : $\boxed{\textbf{L'équation } \mathbf{3\boldsymbol{x} + 1 = 7\boldsymbol{x} - 2} \textbf{ a une solution : } \boldsymbol{x} = \mathbf{\frac{3}{4}}.}$

IV. *Résoudre un problème en le mettant en équation et le rédiger*

Méthode Pour résoudre un problème en le mettant en équation, il faut respecter quatre phases :

☞ **La mise en équation**

- Déterminer ce que l'on cherche : c'est à dire ***choisir l'inconnue*** que l'on notera souvent x ;
- ***Traduire les phrases*** de l'énoncé en fonction de x en une égalité mathématique : on obtient l'***équation***.

☞ **La résolution**

- ***Résoudre*** l'équation (en appliquant les règles de résolution d'une équation…)

☞ **La vérification**

- Remplacer les solutions trouvées dans l'équation pour ***vérifier*** qu'il y a bien égalité (voir paragraphe I.).

☞ **La conclusion**

- ***Rédiger une phrase*** pour répondre au problème concret.

V. Résoudre une équation-produit

Propriété Si un produit est égal à 0, alors l'un de ces facteurs est égal à 0.

Exemple Résoudre l'équation $(3x - 1)(7x + 2) = 0$.

Solution : Si un produit est nul, alors l'un de ces facteurs est nul.

Donc :

soit	$3x - 1 = 0$	soit	$7x + 2 = 0$
	$3x = 1$		$7x = -2$
	$x = \frac{1}{3}$		$x = -\frac{2}{7}$

L'équation $(3x - 1)(7x + 2) = 0$ a donc ***deux solutions*** : $x = \frac{1}{3}$ et $x = -\frac{2}{7}$

VI. Résoudre une équation du type $x^2 = a$

Soit a un nombre donné.

- Si a est positif, l'équation $x^2 = a$ a deux solutions.
  $x = +\sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$
- Si $a = 0$, l'équation $x^2 = 0$ a une solution $x = 0$.
- Si a est négatif, l'équation $x^2 = a$ n'a aucune solution.

Exemples: Résoudre les équations.

(1) $x^2 = 169$

(2) $x^2 = -12$

(3) $x^2 = 13$

Solution.

(1) L'équation $x^2 = 169$ a deux solutions.

$x = \sqrt{169} = 13$ et $x = -\sqrt{169} = -13$

(2) L'équation $x^2 = -12$ n'a aucune solution car -12 est négatif.

(3) L'équation $x^2 = 13$ a deux solutions :

$x = \sqrt{13}$ et $x = -\sqrt{13}$.

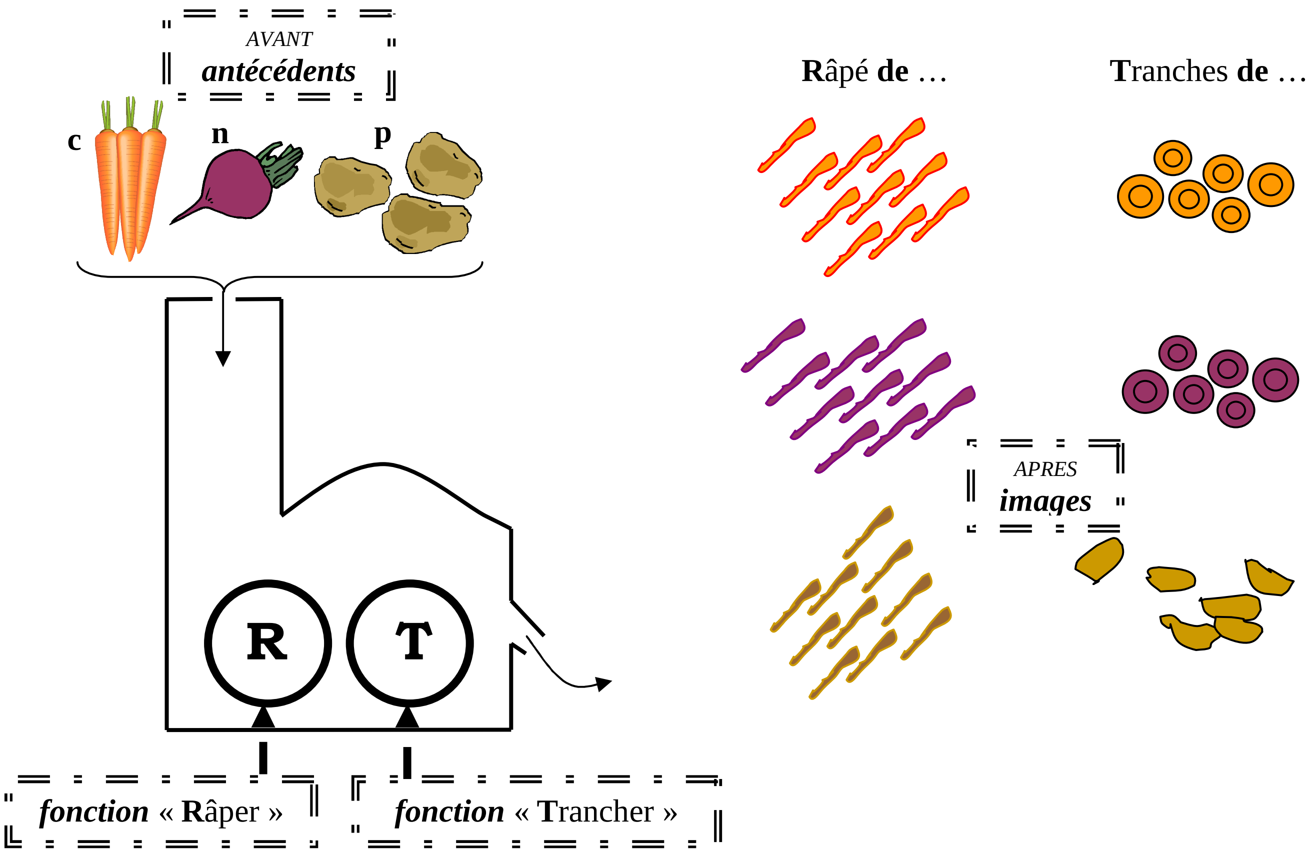
VII. Et avec plusieurs inconnues : les systèmes

VIII. Et avec des inéquations ?

FICHE n°10

Comprendre la notion de fonction

I. Pour mieux comprendre : avec des « légumes »



Le nom de la ***fonction*** précise la transformation que l'on va effectuer…
L'***antécédent*** représente « ce que l'on a au départ » et l'***image*** représente « ce que l'obtient à l'arrivée ».

Notation

$$\mathbf{R : c \mapsto R(c)}$$

nom de la fonction — *départ* — *arrivée* on dit « **R de c** »

II. En mathématiques : avec des nombres…

Dans cette partie, on considère la fonction ***p*** définie par le programme de calcul suivant :
« *Je pense à un nombre. Je calcule le carré de ce nombre et je soustrais 5 au résultat.* »

1. _La formule_

On note : $\boldsymbol{p : x \mapsto p(x) = x^2 - 5}$ et on dit : « la fonction ***p*** qui à ***x*** associe $\boldsymbol{x^2 - 5}$ »

p : nom de la ***« fonction »***

x : nombre du départ ***« antécédent »***

p*(*x*)** : nombre d'arrivée ***« image de x par la fonction p »

EXERCICE TYPE 1 ***Calculer l'image d'un nombre***

Calculons l'image de **2** par la fonction ***p*** :

$\boldsymbol{p}(\mathbf{2}) = \mathbf{2}^2 - 5 = 4 - 5 = -1$

On remplace ***x*** par **2**

L'image de **2** par la fonction ***p*** est **–1**.

EXERCICE TYPE 2 ***Déterminer un antécédent d'un nombre***

Déterminer un antécédent de **7** par la fonction ***p*** :

$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{7}$
$\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} \mathbf{- 5 = 7}$
$\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} \mathbf{= 12}$

Il faut trouver un nombre ***x*** tel que ***p***(***x***) = **7**.

On résout donc une équation…

$\boldsymbol{x} = \sqrt{\mathbf{12}}$ est un antécédent de **7** par la fonction ***p***.

Vérification : $\boldsymbol{p}(\sqrt{12}) = (\sqrt{12})^2 - 5 = 12 - 5 = 7$

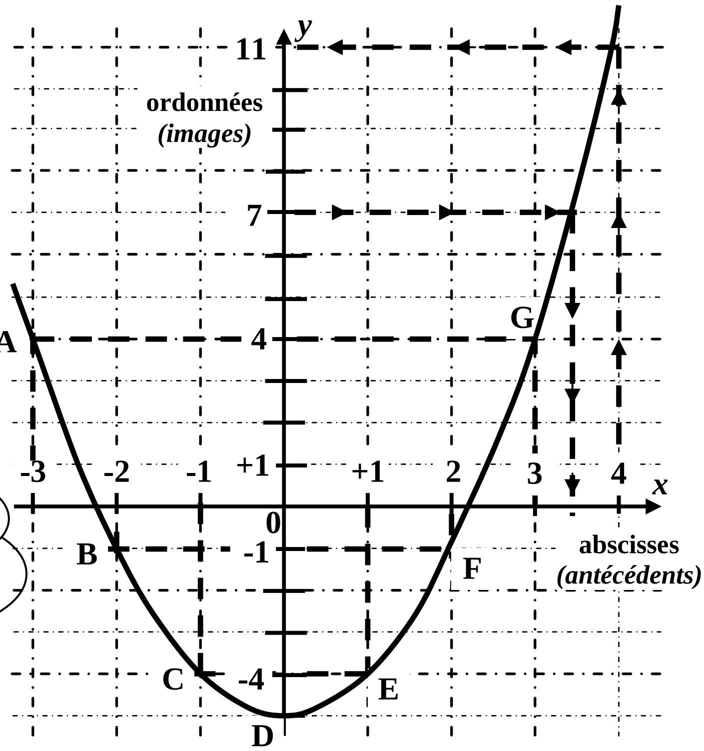
2. La représentation graphique

Dans un repère, on peut représenter graphiquement une fonction à l'aide d'un ***tableau de valeurs*** :

x	– 3	– 2	– 1	0	**1**	2	3
p(***x***)	4	– 1	– 4	– 5	**– 4**	– 1	4
point	A	B	C	D	**E**	F	G

$\boldsymbol{p}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}^2 - 5 = 1 - 5 = \mathbf{-4}$

Le point **E** de coordonnées **(1 ; – 4)** appartient à la représentation graphique de la fonction ***p***.



EXERCICE TYPE 3 ***Déterminer graphiquement l'image d'un nombre***

Déterminons graphiquement l'image de **4** par la fonction ***p*** :

Méthode On cherche l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse **4**.
On indique par des pointillés notre analyse graphique…

Conclusion Graphiquement, l'image de **4** par la fonction ***p*** est approximativement **11**.

EXERCICE TYPE 4 ***Déterminer graphiquement un antécédent d'un nombre***

Déterminons graphiquement un antécédent de **7** par la fonction ***p*** :

Méthode On cherche l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée **7**.
On indique par des pointillés notre analyse graphique…

Conclusion Graphiquement, un antécédent de **7** par la fonction ***p*** est approximativement **3,4**.

Remarque A l'exercice type 2, nous avons déterminé la *valeur exacte* de cet antécédent de 7 par le calcul ! L'observation graphique ne permet d'obtenir que des valeurs approchées…

FICHE n°11
Fonctions linéaires et fonctions affines

I. Les trois aspects d'une fonction linéaire

1. Le programme de calcul

Définition Le programme de calcul qui, à un nombre x, fait correspondre le produit $\mathbf{a}x$ (où **a** est un nombre fixé) est appelé ***fonction linéaire***.

$$x \xrightarrow{\text{On multiplie par } \mathbf{a}} \mathbf{a}x$$

Notation Si une fonction linéaire se nomme f, on note : $f : x \mapsto f(x) = \mathbf{a}x$

Exemple La fonction t qui à un nombre x associe son triple se note : $t : x \mapsto t(x) = 3x$

Cette fonction est une fonction linéaire dont le coefficient est : $\boxed{\mathbf{a} = 3}$

L'***image*** de **4** par la fonction t est **12** car $t(\mathbf{4}) = 3\times\mathbf{4} = \mathbf{12}$.

2. Le tableau de valeurs

Exemple (suite) On considère la fonction $t : x \mapsto 3x$:

x	–2	–1,5	0	1	4
$t(x)$	–6	– 4,5	0	3	12

× 3

Propriété Une **fonction linéaire** décrit une **situation de proportionnalité**.
Le coefficient de cette fonction linéaire est le coefficient de proportionnalité.

3. La représentation graphique

Propriété Dans un repère du plan, la représentation graphique d'une fonction linéaire $f : x \mapsto \mathbf{a}x$ est une **droite** qui **passe par l'origine** et le point de coordonnées (**1** ; **a**).

a s'appelle le ***coefficient directeur*** (ou ***pente***) de cette droite.

Exemple (suite) Traçons la représentation graphique de la fonction affine $t : x \mapsto 3x$

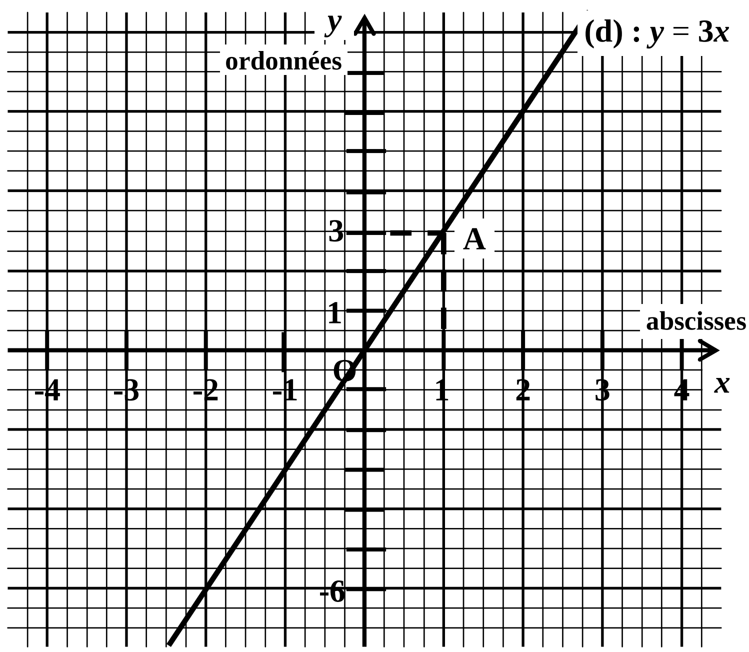
Analyse :

D'après la leçon, la représentation graphique d'une la fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine.
Il suffit donc de ***déterminer un autre point de cette droite***.

Calcul :

$t(\mathbf{1}) = 3\times\mathbf{1} = \mathbf{3}$.

La droite (d) passe donc par le point **A** de coordonnées (**1** ; **3**).



II. Les trois aspects d'une fonction affine

1. Le programme de calcul

Définition Le programme de calcul qui, à un nombre ***x***, fait correspondre le nombre **a*x*+b** (où **a** et **b** sont deux nombres fixés) est appelé ***fonction affine***.

$$x \xrightarrow{\text{On multiplie par } \mathbf{a}} \mathbf{a}x \xrightarrow{\text{puis on ajoute } \mathbf{b}} \mathbf{a}x+\mathbf{b}$$

Notation Si une fonction affine se nomme ***f***, on note : $f : x \mapsto f(x) = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$

Exemple La fonction $g : x \mapsto -2x + 3$ est une fonction affine avec $\boxed{\mathbf{a = -2 \text{ et } b = 3}}$

L'***image*** de **4** par la fonction ***g*** est **–5** car $g(x) = -2\times\mathbf{4} + 3 = -8 + 3 = \mathbf{-5}$

2. Le tableau de valeurs

Exemple (suite) On considère la fonction $g : x \mapsto -2x + 3$:

x	–2	0	1	1,5	4
$g(x)$	7	3	1	0	–5

Remarque Ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité.

3. La représentation graphique

Propriété

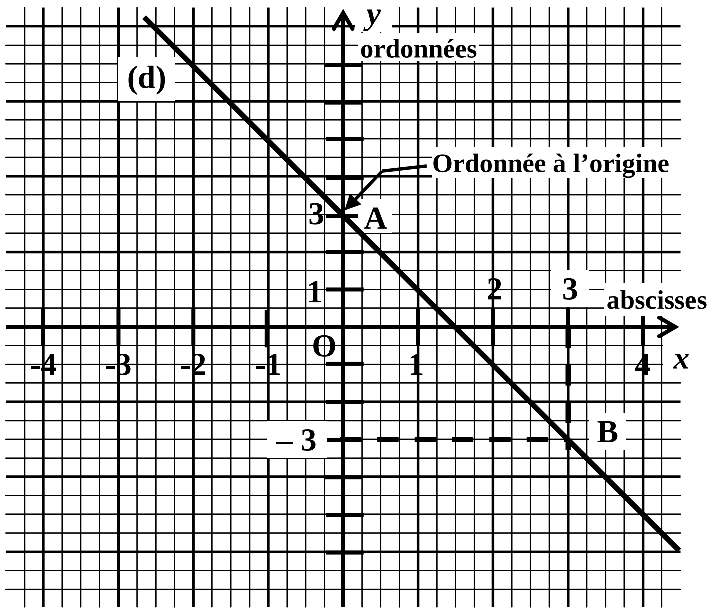
Dans un repère du plan, la représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto \mathbf{a}x + \mathbf{b}$ est une **droite** qui passe par le point de coordonnées (**0** ; **b**).

a s'appelle le ***coefficient directeur*** de cette droite et **b** s'appelle l'***ordonnée à l'origine***.

Exemple (suite) Traçons la représentation graphique de la fonction affine $g : x \mapsto -2x + 3$.

Analyse : D'après la leçon, la représentation graphique de la fonction affine est une droite (d).
Il suffit donc de ***déterminer deux points de cette droite*** :

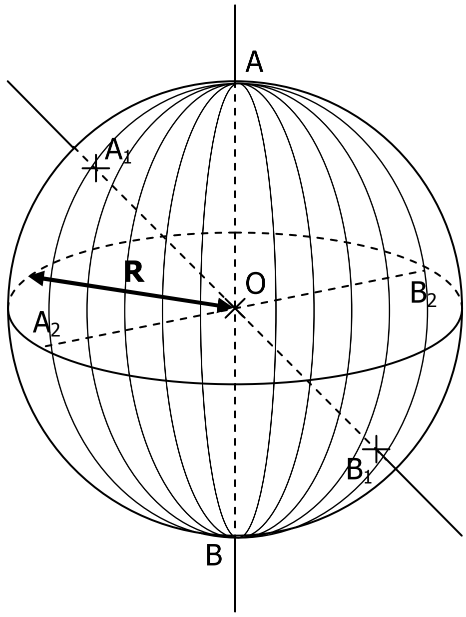
- $g(\mathbf{0}) = -2\times\mathbf{0} + 3 = \mathbf{3}$. La droite (d) passe donc par le point **A(0 ; 3)** ;
- $g(\mathbf{3}) = -2\times\mathbf{3} + 3 = \mathbf{-3}$. La droite (d) passe donc par le point **B(3 ; –3)** ;



FICHE n°12
Un petit tour dans l'espace…

I. Etude de la sphère

1. Définition et vocabulaire



Définition Soit O un point de l'espace.

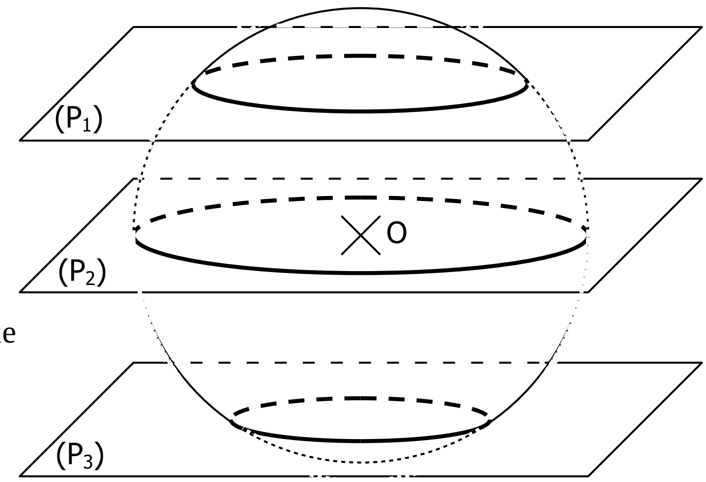
On appelle ***sphère de centre O et de rayon R*** l'ensemble de tous les points de l'espace qui sont situés **à une même distance** R du point O.

On appelle ***boule de centre O et de rayon R*** l'ensemble de tous les points de l'espace qui sont situés **à une distance** du point O **inférieure ou égale** à R.
(La sphère avec l'intérieur de la sphère…)

Vocabulaire

Les segments [AB], [A_1B_1] et [A_2B_2] sont des ***diamètres*** de la sphère.
On dit que les points A et B sont diamétralement opposés.

2. Section d'une sphère par un plan



Théorème (admis)

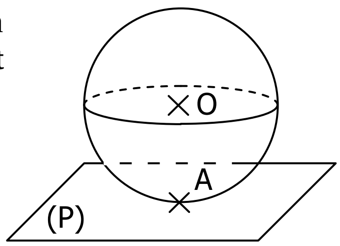
La section d'une sphère par un plan est un cercle.

Remarque

Quand le plan passe par le centre O (Plan P_2), le cercle a le même rayon que la sphère.

Cas particulier

Quand la section de la sphère par le plan n'est qu'un point, on dit que **le plan est tangent à la sphère**.



3. Aire et volume d'une sphère

Aire de la sphère : L'aire de la sphère de rayon R est donnée par la formule : $\boxed{\mathbf{A = 4\,\pi\,R^2}}$

Volume de la sphère : Le volume d'une boule de rayon R est donné par la formule : $\boxed{\mathbf{V = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3}}$

II. Sections d’un pavé droit par un plan

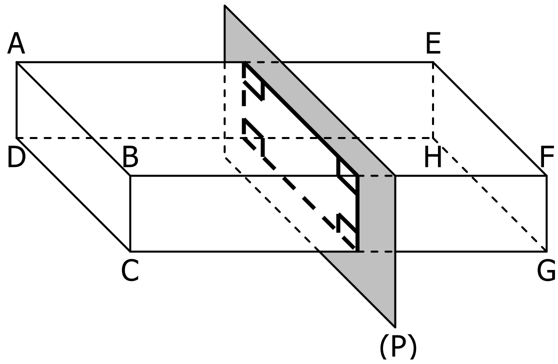
<table>
<tr>
<td>

<u>*Théorème (admis)*</u>

***La section d’un pavé droit par un plan parallèle à une face est un rectangle identique à cette face*.**

<u>*Exemple*</u>

Le plan (P) est parallèle à la face ABCD (ou EFGH) :



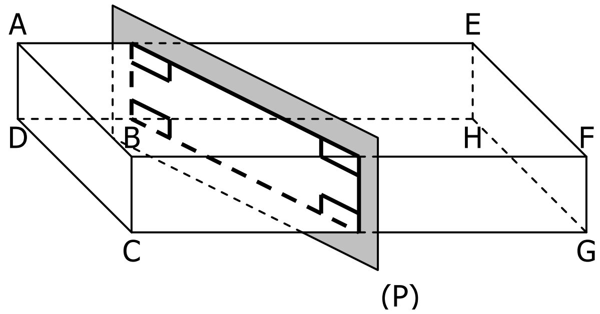
</td>
<td>

<u>*Théorème (admis)*</u>

La section d’un pavé droit par un plan parallèle à une arête est un rectangle.

<u>*Exemple*</u>

Le plan (P) est parallèle à l’arête [AD] (ou [BC] ou [EH] ou [FG]) :



</td>
</tr>
</table>

III. Sections d’un cylindre de révolution par un plan

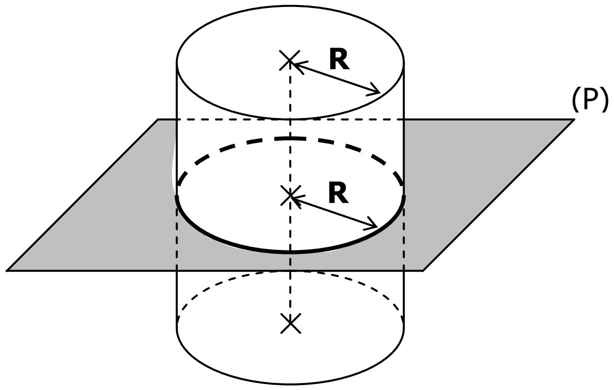
<table>
<tr>
<td>

<u>*Théorème (admis)*</u>

La section d’un cylindre de rayon R par un plan parallèle aux bases est un cercle de rayon R.

<u>*Exemple*</u>

Le plan (P) est parallèle aux deux bases :



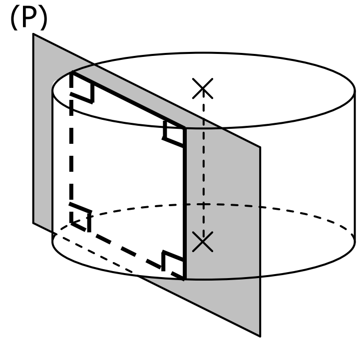
</td>
<td>

<u>*Théorème (admis)*</u>

La section d’un cylindre par un plan parallèle à l’axe de révolution est un rectangle.

<u>*Exemple*</u>

Le plan (P) est parallèle à l’axe de révolution :

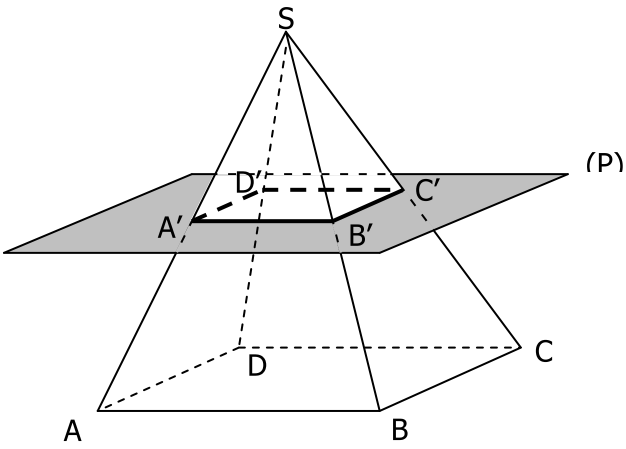


</td>
</tr>
</table>

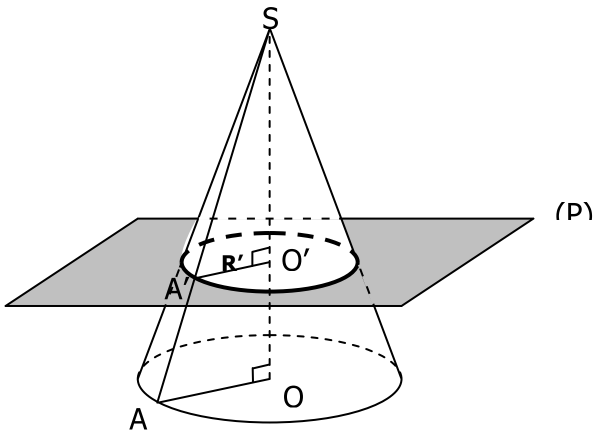
IV. *Sections d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base*

<u>*Théorème (admis)*</u>

La section d'une pyramide ou d'un cône de révolution **par un plan parallèle à la base** est une **réduction de la base**.



<u>***Pyramide***</u>



<u>***Cône de révolution***</u>

Les longueurs de la pyramide SA'B'C'D' sont proportionnelles aux longueurs de la pyramide SABCD. Comme c'est une réduction, le coefficient de proportionnalité doit être inférieur à 1.

EXERCICE TYPE

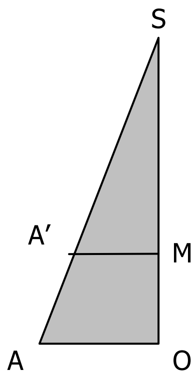
On considère un cône de révolution de sommet S.

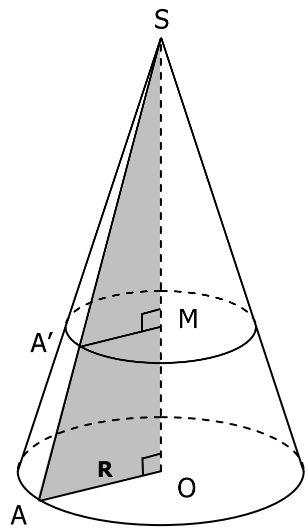
- Sa base est un disque de rayon OA = 6 cm.
- Sa hauteur SO mesure 20 cm.

Le plan parallèle à la base passant par M coupe SA en A'.

1- Déterminer les caractéristiques de la section du cône par ce plan si SM = 10 cm.

2- Déterminer les caractéristiques de la section du cône par ce plan si SM = 4 cm.





<u>*Solution*</u>

Non encore rédigée… A suivre…

FICHE n°13

Outils de géométrie et tracés

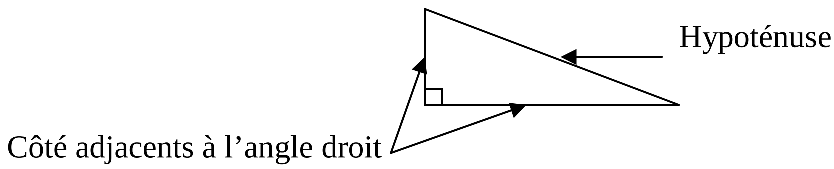
En cours de réalisation…

FICHE n°14
Des théorèmes dans un triangle rectangle

I. Rappel : le vocabulaire du triangle rectangle

<u>Définition</u> Dans un triangle rectangle, ***l'hypoténuse*** est le côté opposé à l'angle droit.

<u>Remarque</u> L'***hypoténuse*** est aussi le côté le plus long d'un triangle rectangle.

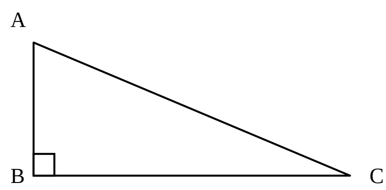


II. Le théorème de Pythagore et sa réciproque

1. Pour calculer la longueur manquante d'un triangle rectangle : le <u>théorème</u> de Pythagore

<u>Théorème</u> Si **un triangle est rectangle**, alors **le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés adjacents à l'angle droit**.

<u>Exemple avec une figure</u>



Le triangle ABC est rectangle en B.
L'hypoténuse est donc le côté [AC].
D'après le théorème de Pythagore, on peut donc écrire :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

2. Pour montrer qu'un triangle est rectangle : la <u>réciproque</u> du théorème de Pythagore

<u>Théorème</u> Dans un triangle, si **le carré de la longueur du côté le plus long est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés**, alors **ce triangle est rectangle**.

<u>Remarque</u> L'angle droit est alors l'angle opposé au côté le plus long du triangle.

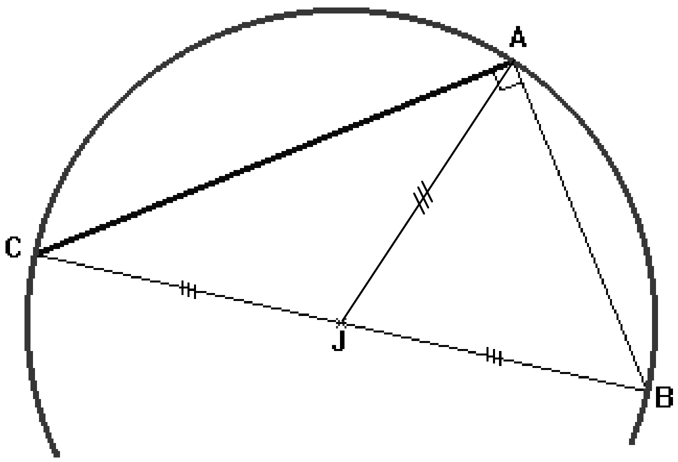
III. *Triangle rectangle et cercle circonscrit*

1. Si le triangle est rectangle : le <u>théorème</u>

<u>Théorème</u>

Si un triangle est rectangle, **alors ce triangle est inscrit dans un cercle dont le centre est le milieu de l'hypoténuse.**

<u>Rappel</u> Ce cercle s'appelle le ***cercle circonscrit*** au triangle.



<u>Remarque 1</u> Le diamètre du cercle circonscrit est donc l'hypoténuse
et son rayon mesure la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

<u>Remarque 2</u> Les segments [CJ], [BJ] et [AJ] sont alors de même longueur.

2. Pour montrer que le triangle est rectangle : la <u>réciproque</u> du théorème

<u>Théorème réciproque</u>

Si un triangle est inscrit dans un cercle dont un diamètre est un côté du triangle, **alors ce triangle est rectangle.**

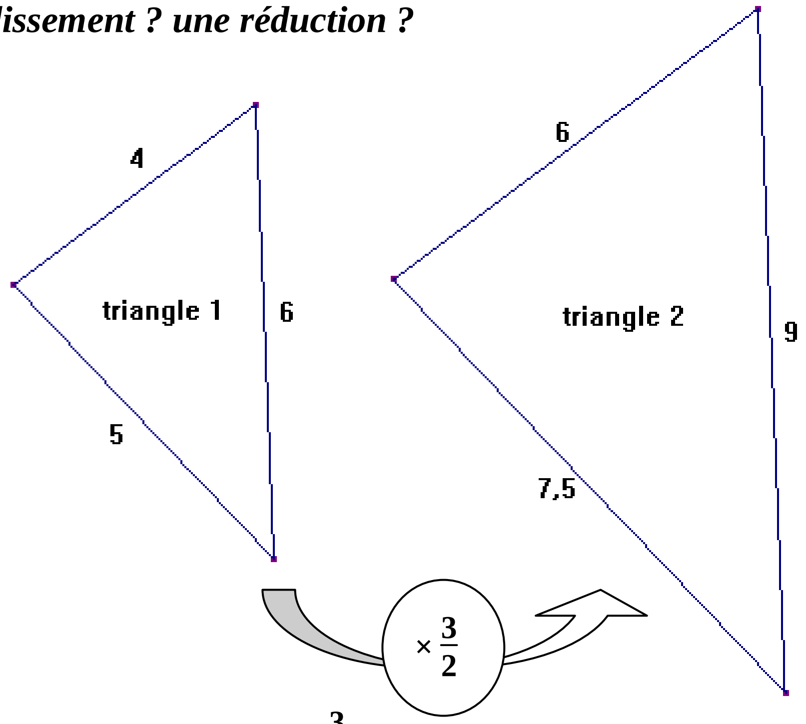
<u>Autre formulation du théorème réciproque</u>

Si M est un point placé sur un cercle de diamètre [AB], alors l'angle $\widehat{BMA}$ mesure 90°.

FICHE n°15
Agrandissements et réductions

I. Qu'est ce qu'un agrandissement ? une réduction ?

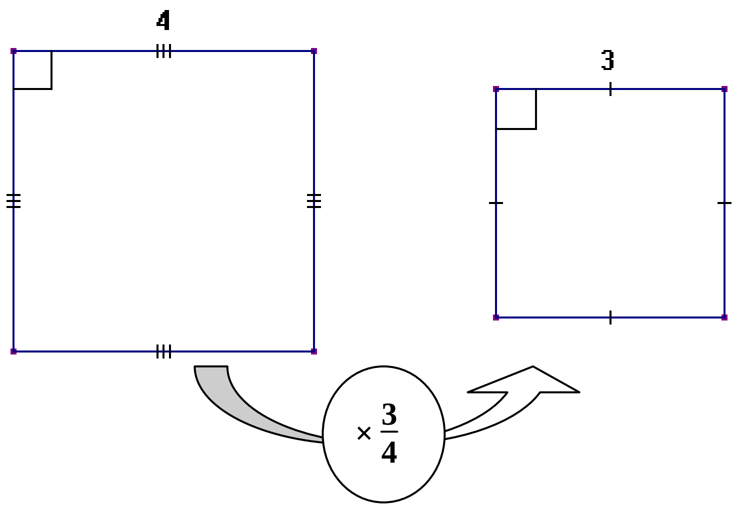
Exemple 1



$\frac{6}{4} = \mathbf{\frac{3}{2}}$; $\frac{7{,}5}{5} = \mathbf{\frac{3}{2}}$; $\frac{9}{6} = \mathbf{\frac{3}{2}}$

On dit que le *triangle 1* est un agrandissement de rapport $\mathbf{\frac{3}{2}}$ de la *triangle 2* car les longueurs du *triangle 2* s'obtiennent en multipliant les longueurs du *triangle 1* par $\mathbf{\frac{3}{2}}$ (qui est plus grand que 1).

Exemple 2



On dit que le *carré 3* est une réduction à l'échelle $\mathbf{\frac{3}{4}}$ du *carré 4* car les longueurs du *carré 4* s'obtiennent en multipliant les longueurs du *carré 3* par $\mathbf{\frac{3}{4}}$ (qui est plus petit que 1).

Définition Dans un ***agrandissement*** ou une ***réduction de rapport*** **k** (on dit aussi à l'échelle **k**), les longueurs sont multipliées par **k**.

$$\mathbf{k} = \frac{\textbf{longueur sur la figure initiale}}{\textbf{longueur obtenue après l'agrandissement ou la réduction}}$$

Remarque Si **k < 1**, il s'agit d'une **réduction** ; Si **k > 1**, il s'agit d'un **agrandissement**.

FICHE n°16
Le théorème de Thalès…

I. *Le théorème de Thalès*

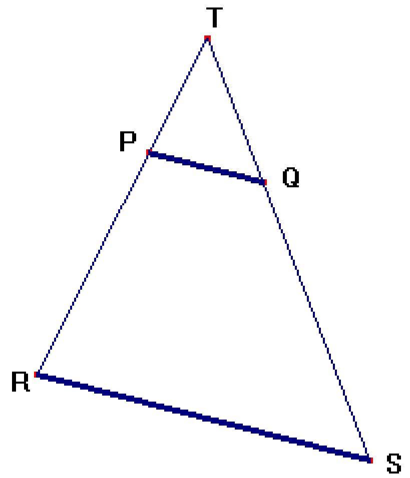
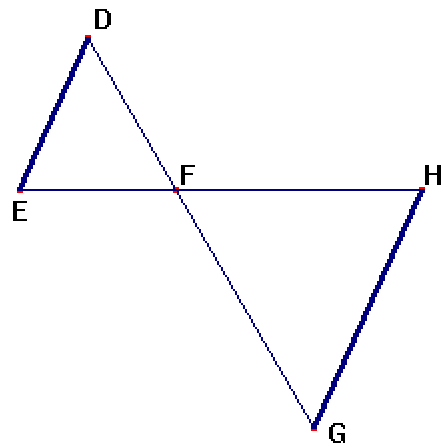
Théorème de Thalès

Soit d et d' deux droites sécantes en A,
Soit B et M deux points de la droite d, distincts de A,
Soit C et N deux points de la droite d', distincts de A,

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, **alors** : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \longleftarrow \frac{\text{triangle AMN}}{\text{triangleABC}}$

Remarque Autrement dit, avec les données du théorème de Thalès, le triangle AMN est un agrandissement ou une réduction du triangle ABC.

Les deux figures-clé à connaître :

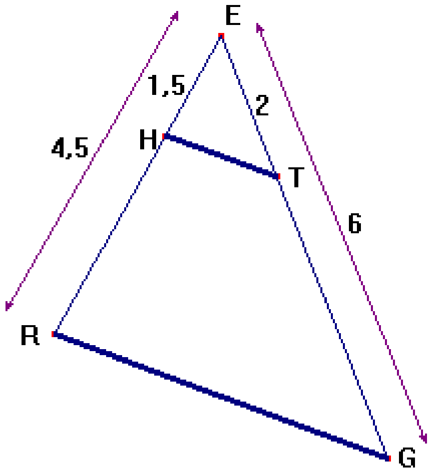
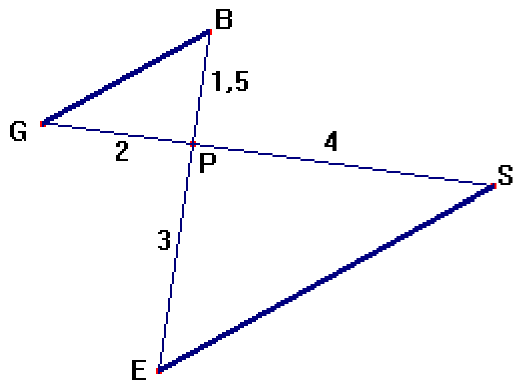
Figures-clé		
Données	➢ T, P et R sont alignés, ➢ T, Q et S sont alignés, ➢ (PQ) est parallèle à (RS)	➢ F, G et D sont alignés, ➢ F, H et E sont alignés, ➢ (DE) est parallèle à (GH)
Repérage des triangles	1er triangle : T P Q ↕ ↕ ↕ 2ème triangle : T R S	1er triangle : F E D ↕ ↕ ↕ 2ème triangle : F H G
Egalités des rapports	$\frac{TP}{TR} = \frac{TQ}{TS} = \frac{QP}{RS}$	$\frac{FE}{FH} = \frac{FD}{FG} = \frac{ED}{HG}$

II. *La réciproque du théorème de Thalès*

La réciproque du théorème de Thalès

> Soit d et d’ deux droites sécantes en A,
> Soit B et M deux points de la droite d, distincts de A,
> Soit C et N deux points de la droite d’, distincts de A,
>
> **Si** les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés dans le même ordre et **si** $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$,
>
> **alors** les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Les deux figures-clé à connaître :

Figures-clé		
Repérage des triangles	1er triangle : E H T ↕ ↕ ↕ 2ème triangle : E R G	1er triangle : P E S ↕ ↕ ↕ 2ème triangle : P B G
Données	➢ **Les points E, H, T et les points E, T, G sont alignés <u>dans le même ordre</u>** ➢ $\left.\begin{array}{l}\frac{EH}{ER}=\frac{1,5}{4,5}=\frac{1,5\times2}{4,5\times2}=\frac{3}{9}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\\ \frac{ET}{EG}=\frac{2}{6}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\end{array}\right\}\quad \frac{\mathbf{EH}}{\mathbf{ER}}=\frac{\mathbf{ET}}{\mathbf{EG}}$	➢ **Les points B, P, E et les points G, P, S sont alignés <u>dans le même ordre</u>** ➢ $\left.\begin{array}{l}\frac{BP}{PE}=\frac{1,5}{3}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\\ \frac{GP}{PS}=\frac{2}{4}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\end{array}\right\}\quad \frac{\mathbf{BP}}{\mathbf{PE}}=\frac{\mathbf{GP}}{\mathbf{PS}}$
Conclusion	**Les droites (HT) et (RG) sont parallèles**	**Les droites (GB) et (ES) sont parallèles**

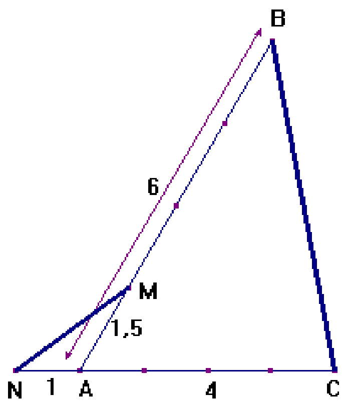
Attention ! La donnée « <u>alignés dans le même ordre</u> » est indispensable pour appliquer la réciproque du théorème de Thalès.

Contre-exemple

Sur la figure ci-contre, on a : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=0,25.$

mais les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

La réciproque du théorème ne s’applique pas car les points A, M, B et les points A, N, C ne sont pas alignés dans le même ordre.



FICHE n°17
Trigonométrie dans un triangle rectangle

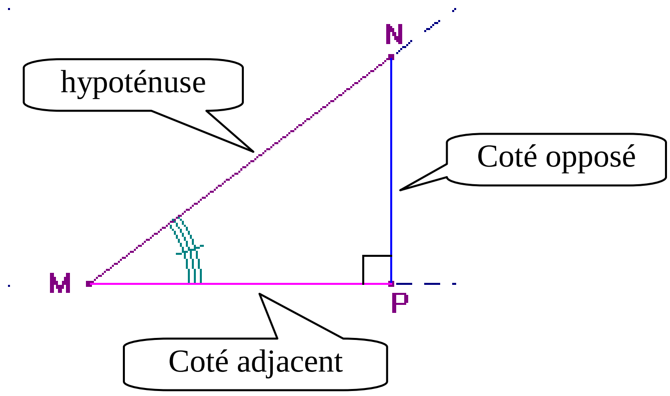
I. *Définitions : cosinus, sinus, tangente*

Dans un triangle MNP rectangle en P :

- $\cos \widehat{NMP} = \dfrac{\text{côté } \textbf{adjacent} \text{ à l'angle } \widehat{NMP}}{\textbf{hypoténuse}}$
- $\sin \widehat{NMP} = \dfrac{\text{côté } \textbf{opposé} \text{ à l'angle } \widehat{NMP}}{\textbf{hypoténuse}}$
- $\tan \widehat{NMP} = \dfrac{\text{côté } \textbf{opposé} \text{ à l'angle } \widehat{NMP}}{\text{côté } \textbf{adjacent} \text{ à l'angle } \widehat{NMP}}$

Pour s'en rappeler :

« ***CahSohToa*** »



- $\mathbf{\cos \widehat{NMP} = \dfrac{MP}{MN}}$
- $\mathbf{\sin \widehat{NMP} = \dfrac{NP}{MN}}$
- $\mathbf{\tan \widehat{NMP} = \dfrac{NP}{MP}}$

II. *Avec la calculatrice*

Attention ! Il existe plusieurs unités pour les angles (degrés, radians, grades).
Avant d'utiliser sa calculatrice, il faut donc toujours vérifier qu'elle est en mode « degré ».
Pour cela, vous devez regarder la notice de votre calculatrice…

<u>Exemple d'utilisation de la calculatrice (touche cos)</u>

a/ Déterminer un cosinus

Pour déterminer avec une calculatrice le cosinus d'un angle dont on connaît la mesure on utilise la touche cos.

Exemple. Déterminer un arrondi à 0,001 près de cos 43°.

On tape cos 4 3 (ou 4 3 cos).

On obtient 0,731 353 7 (cela dépend du degré de précision de la calculatrice).

Donc cos 43° ≈ 0,731.

b/ Déterminer un angle

Pour déterminer un angle avec une calculatrice, connaissant son cosinus, on utilise la touche correspondant à « $\cos^{-1}$ » que l'on atteint souvent avec la touche INV ou 2nd ou SCHIFT ou… voir le mode d'emploi de votre calculatrice.

Exemple. Déterminer une troncature à 0,1° près de x, sachant que $\cos x = 0{,}67$.

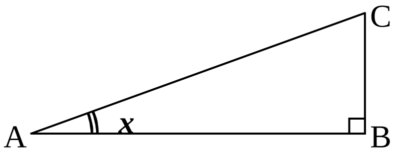
On tape $\cos^{-1}$ 0 , 6 7.

On obtient 47,932 93 (cela dépend du degré de précision de la calculatrice).

Donc $x \approx 47{,}9°$.

III. Exercices type

Dans tous les exercices type suivants, on considère un triangle ABC rectangle en B :



EXERCICE TYPE 1 : ***On connaît 2 côtés et on cherche à déterminer l'angle.***

1. *On détermine le triangle rectangle.*
2. *On écrit la bonne formule.*
3. *On calcule le membre de droite.*
4. *A l'aide de la calculatrice, on détermine l'angle.*

EXEMPLE CORRIGE

On sait que : AB = 5 et BC = 2

On cherche : $\widehat{CAB}$

1.	**Le triangle ABC est rectangle en B :**
2.	$\tan \widehat{CAB} = \dfrac{BC}{AB}$
3.	$\tan \widehat{CAB} = \dfrac{2}{5}$ $\tan \widehat{CAB} = 0{,}4$
4.	donc $\widehat{CAB} \approx 21{,}8°$

EXERCICE TYPE 2 : ***On connaît 1 côté et l'angle et on cherche à déterminer le côté qui se trouve au numérateur dans la formule.***

1. *On détermine le triangle rectangle.*
2. *On écrit la bonne formule.*
3. *On calcule résout l'équation.*
4. *A l'aide de la calculatrice, on détermine l'angle.*

EXERCICE CORRIGE

On sait que : AC = 7 et $\widehat{CAB}$ = 30°
On cherche : AB

1.	**Le triangle ABC est rectangle en B :**
2.	$\cos \widehat{CAB} = \dfrac{AB}{AC}$
3.	$\cos 30 = \dfrac{AB}{7}$ $AB = \dfrac{7 \times \cos 30}{1}$
4.	donc AB ≈ 6,1 cm

EXERCICE TYPE 3 : ***On connaît 1 côté et l'angle et on cherche à déterminer le côté qui se trouve au dénominateur dans la formule.***

1. *On détermine le triangle rectangle.*
2. *On écrit la bonne formule.*
3. *On calcule résout l'équation.*
4. *A l'aide de la machine, on détermine l'angle.*

EXERCICE CORRIGE

On sait que : BC = 5 et $\widehat{CAB}$ = 25°
On cherche : AC

1.	**Le triangle ABC est rectangle en B :**
2.	$\sin \widehat{CAB} = \dfrac{BC}{AC}$
3.	$\sin 25 = \dfrac{5}{AC}$ $AC = \dfrac{5 \times 1}{\sin 25}$
4.	donc AC ≈ 11,8 cm

FICHE BILAN - *Vocabulaire et propriétés de base*

Orthogonalité et parallélisme

- Par un point donné, il passe une seule droite parallèle à une droite donnée.
- Si deux droites sont parallèles à une même troisième droite, alors elles sont parallèles.

Pour démontrer que trois points A, B et C sont alignés, il suffit de démontrer que les droites (AB) et (AC) sont parallèles.

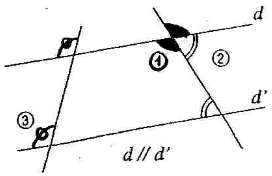
- Par un point donné, il passe une seule droite perpendiculaire à une droite donnée.

Pour démontrer que trois points A, B et C sont alignés, il suffit de démontrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires à une même droite.

- Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors elles sont parallèles.
- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

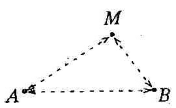
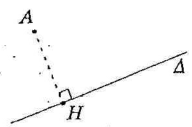
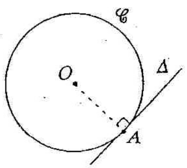
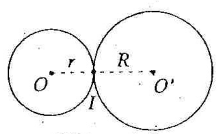
Angles

- La mesure d'un angle saillant est comprise entre $0°$ et $180°$. Celle d'un angle rentrant est comprise entre $180°$ et $360°$.
- Pour démontrer que trois points A, B et C sont alignés, il suffit de montrer que l'angle $\widehat{ABC}$ est plat ($180°$).

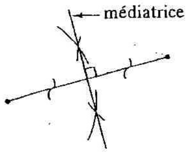


- Deux angles complémentaires (resp. supplémentaires) sont deux angles dont la somme est égale à $90°$ (resp. $180°$).
- Deux angles opposés par le sommet sont égaux (①).
- Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors deux angles alternes-internes sont égaux (②), deux angles correspondants (③) sont égaux.

Réciproquement, si deux droites sont coupées par une sécante en formant deux angles alternes-internes (ou correspondants) égaux, alors elles sont parallèles.

Inégalité triangulaire	*Distance point-droite*	*Tangente à un cercle*	*Cercles tangents*
			
Quels que soient les points A, B et M : $AB \leqslant AM + MB$.	AH est la distance du point A à la droite Δ.	$A \in \mathscr{C}$; $A \in \Delta$; $(OA) \perp \Delta$.	$OO' = r + R$. I est le seul point de contact.

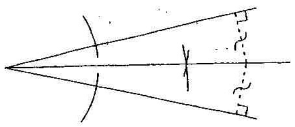
Médiatrice d'un segment



- Si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

Réciproquement, si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment.

Bissectrice d'un angle

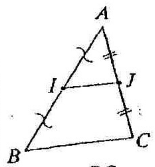


- Si un point est sur la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des côtés de l'angle.

Réciproquement, si un point est équidistant des côtés d'un angle, alors il est sur la bissectrice de cet angle.

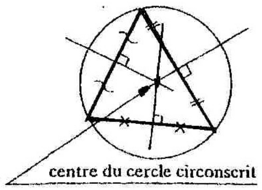
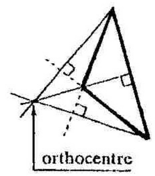
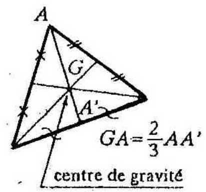
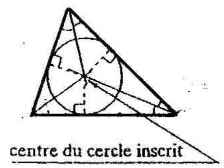
FICHE BILAN - *Dans les triangles…*

Généralités



$IJ = \dfrac{BC}{2}$

- La somme des mesures des angles de tout triangle est égale à $180°$.
- Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté (voir la figure ci-contre).
- Dans un triangle, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de celle du troisième côté.
- Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et si elle est parallèle à un second côté, alors elle coupe le troisième en son milieu.

Médiatrices	*Hauteurs*	*Médianes*	*Bissectrices*
			
centre du cercle circonscrit	orthocentre	centre de gravité	centre du cercle inscrit

- Dans tout triangle, les médiatrices, les hauteurs, les médianes et les bissectrices sont concourantes.

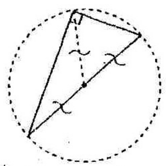
Triangle isocèle

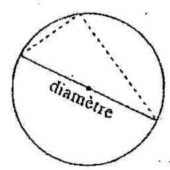
- Dans un triangle isocèle, la médiatrice de la base, la hauteur et la médiane issues du sommet principal ainsi que la bissectrice de l'angle principal sont confondues (c'est l'axe de symétrie du triangle).

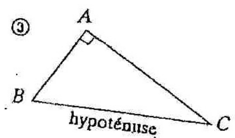
Triangle équilatéral

- Un triangle équilatéral a trois axes de symétrie (il est « trois fois » isocèle). Ses angles mesurent $60°$.
- Si un triangle isocèle a un angle de $60°$, alors il est équilatéral.
- Si un triangle a deux angles de $60°$, alors il est équilatéral.

Triangle rectangle

① 

② 

③ 

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

Cercle circonscrit à un triangle rectangle

- Si un triangle est rectangle, alors son cercle circonscrit a pour diamètre l'hypoténuse (①).
- Réciproquement, si un triangle est inscrit dans un cercle en ayant un diamètre du cercle pour côté, alors ce triangle est rectangle (et le diamètre du cercle est l'hypoténuse) (②).

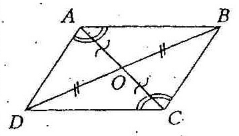
Théorème de Pythagore

- Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit (③).
- *Réciproquement*, si les côtés d'un triangle ABC vérifient l'égalité $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.

de la $6^{ème}$ à la $3^{ème}$

FICHE BILAN - *Dans les quadrilatères…*

Parallélogramme



C'est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

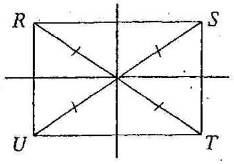
- Un parallélogramme a un centre de symétrie qui est le point d'intersection des diagonales.
- Dans un parallélogramme :

– les diagonales se coupent en leur milieu ; les côtés opposés ont la même longueur ;
– les angles opposés sont égaux ; deux angles consécutifs sont supplémentaires.

Comment reconnaître un parallélogramme ?

- Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
- Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
- Si les côtés opposés d'un quadrilatère *non croisé* ont la même longueur, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Rectangle



C'est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

- Dans un rectangle :

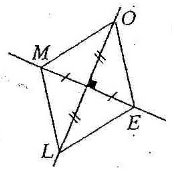
– les côtés opposés sont parallèles et ont la même longueur ;
– les diagonales ont le même milieu et la même longueur.

- Un rectangle a *deux* axes de symétrie perpendiculaires : les *médiatrices des côtés.*

Comment reconnaître un rectangle ?

- Si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle.
- Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.
- Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu et la même longueur, alors c'est un rectangle.
- Si les diagonales d'un parallélogramme ont la même longueur, alors c'est un rectangle.

Losange



C'est un quadrilatère dont les quatre côtés ont la même longueur.

- Dans un losange :

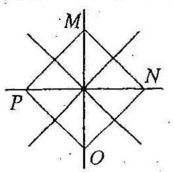
– les côtés opposés sont parallèles ;
– les *diagonales* sont *perpendiculaires* et ont le *même milieu.*

- Un losange a deux axes de symétrie *perpendiculaires :* ses *diagonales.*

Comment reconnaître un losange ?

- Si un quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur, alors c'est un losange.
- Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange.
- Si les diagonales d'un quadrilatère sont perpendiculaires et ont le même milieu, alors c'est un losange.
- Si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires, alors c'est un losange.

Carré



C'est un quadrilatère qui est *à la fois* un rectangle et un losange.

- N'importe quel carré possède donc *toutes* les propriétés d'un rectangle *et* celles d'un losange.
- Un carré a *quatre* axes de symétrie : les *médiatrices des côtés* (comme tous les rectangles) et les *diagonales* (comme tous les losanges).

Comment reconnaître un carré ?

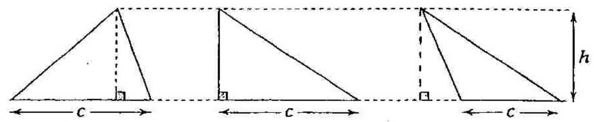
- Pour démontrer qu'un quadrilatère est un carré, on doit prouver qu'il est, à la fois, un rectangle et un losange.

de la $6^{ème}$ à la $3^{ème}$

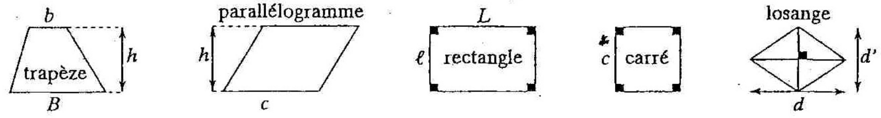
FICHE BILAN - *Périmètres, aires et volumes…*

Triangles

aire d'un triangle : $\dfrac{c \times h}{2}$ $\left(\dfrac{\text{côté} \times \text{hauteur associée}}{2}\right)$



Quadrilatères



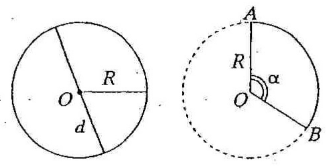
aire $= \dfrac{(B+b) \times h}{2}$ aire $= c \times h$ aire $= L \times \ell$ aire $= c \times c = c^2$ aire $= \dfrac{d \times d'}{2}$

Cercle, disque, arc de cercle, secteur circulaire

Le cercle de centre O et de rayon R est l'ensemble de tous les points situés à la distance R de O.

périmètre du cercle :
$2 \times \pi \times R = 2\pi R = \pi d$

aire du disque :
$\pi \times R \times R = \pi R^2$

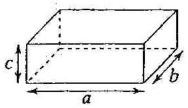


Soit α la mesure, en degrés, de *l'angle au centre* $\widehat{AOB}$.

longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ **:**
$2 \times \pi \times R \times \dfrac{\alpha}{360}$

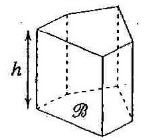
aire du ***secteur ciculaire*** AOB **:**
$\pi \times R^2 \times \dfrac{\alpha}{360}$

Parallélépipède rectangle



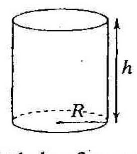
volume $= a \times b \times c = abc$
volume d'un cube : $a \times a \times a = a^3$

Prisme droit



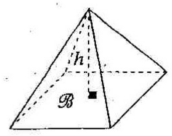
aire latérale = périmètre de base × h
volume $= \mathcal{B} \times h$

Cylindre de révolution



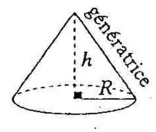
aire latérale $= 2 \times \pi \times R \times h$
volume $= \pi \times R^2 \times h$

Pyramide



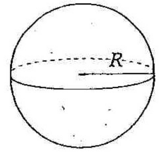
volume $= \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3}$

Cône de révolution



volume $= \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3} = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$

Sphère, boule

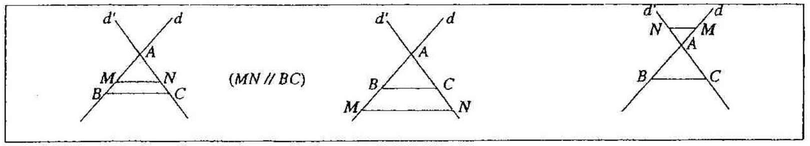


aire $= 4 \times \pi \times R^2$
volume $= \dfrac{4}{3}\pi R^3$

Remarque : Dans un dessin en perspective cavalière, deux droites parallèles dans la réalité sont représentées par deux droites parallèles.

FICHE BILAN - *Géométrie plane en $3^{ème}$*

Configurations de Thalès



Propriété de Thalès **« Réciproque »**

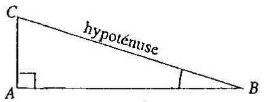
d et d' sont deux droites sécantes en A ; B et M sont deux points de d, distincts de A ; C et N sont deux points de d', distincts de A.

- Si : $(BC) // (MN)$ alors : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$
- Si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ et si A, B, M et A, C, N sont dans le même ordre alors : $(MN) // (BC)$.

Trigonométrie

Cosinus, sinus, tangente

ABC est un triangle rectangle en $\widehat{A}$.



$\cos \widehat{B} = \dfrac{BA}{BC}$; $\sin \widehat{B} = \dfrac{CA}{CB}$; $\tan \widehat{B} = \dfrac{AC}{AB}$

Formules

x est la mesure d'un angle aigu.

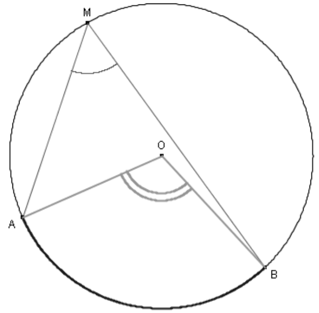
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Angle inscrit – Angle au centre

L'angle est un **angle au centre** qui intercepte l'arc

L'angle est un **angle inscrit** qui intercepte l'arc .



Théorèmes :

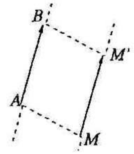
- la mesure d'un angle inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre qui

FICHE BILAN - *Transformations*

Translations, vecteurs

Translation

Dire que M a pour image M' par la translation qui transforme A en B signifie que $ABM'M$ est un parallélogramme.



Égalité vectorielle

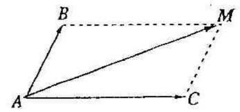
Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$ signifie que la translation qui transforme A en B, transforme aussi M en M'.

Propriétés

- Une translation conserve : les longueurs, l'alignement, les angles, les aires.
- Par une translation :
  – l'image d'une droite est une droite parallèle
  – l'image d'un segment est un segment parallèle de même longueur
  – l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

Somme vectorielle

- **Relation de Chasles :** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- **Règle du parallélogramme :** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$ où $ABMC$ est un parallélogramme.



- **Le vecteur nul** $\vec{0}$ est le vecteur $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, …

$$\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB}$$

- $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

Milieu et vecteurs

- Si I est le milieu de $[AB]$ alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
- Si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ alors I est le milieu de $[AB]$.

Avec des coordonnées

Dans un repère : $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.

Alors :
- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$
- $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ est le milieu de $[AB]$

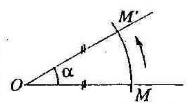
et si le repère est orthonormé :

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Autres transformations

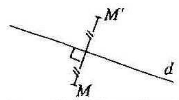
Rotation

M a pour image M' par la rotation de centre O et d'angle α dans le sens de la flèche : $OM = OM'$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$



Symétrie axiale

M a pour image M' par la symétrie d'axe d signifie que : d est la médiatrice de $[MM']$



Symétrie centrale

M a pour image M' par la symétrie de centre O signifie que : O est le milieu de $[MM']$