FICHE n°12

Géométrie plane dans un repère

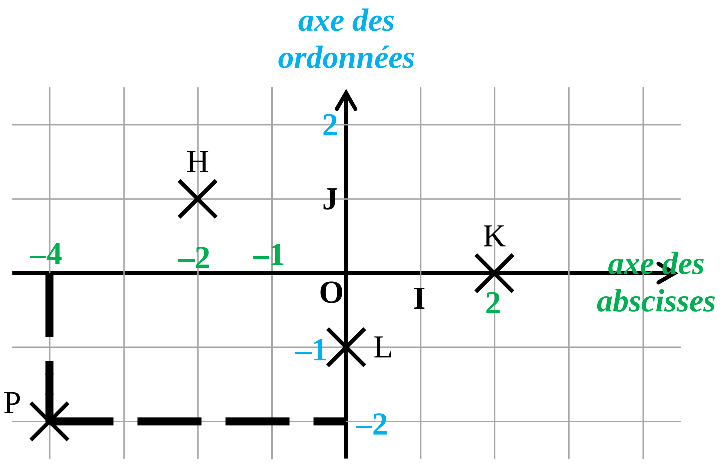
I. Vocabulaire des repères

Définition
- ¤ Un **repère** est constitué par deux axes gradués qui permettent de repérer n'importe quel point du plan par deux nombres : son ***abscisse*** et son ***ordonnée***.
- ¤ Lorsque les axes sont perpendiculaires, on dit que le repère est ***orthogonal***.
- ¤ Un repère orthogonal dont les axes sont gradués de la même manière (même unité) est appelé repère ***orthonormal***.

Exemple Dans le repère orthogonal (O , I , J),
le point **P** a pour ***coordonnées*** (**–4** ; **–2**).

On note **P(–4 ; –2)**.

abscisse ***ordonnée***



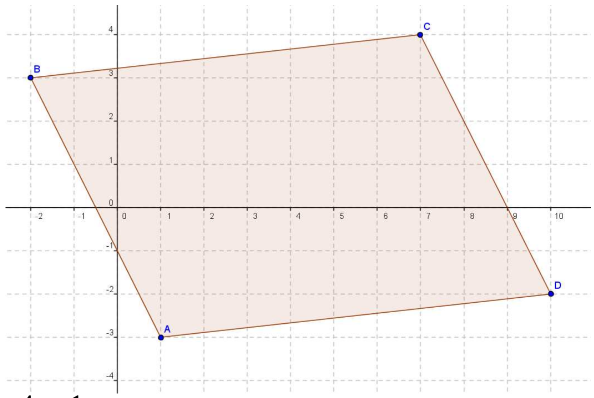
II. Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété Dans un repère orthonormé, si A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) sont deux points du plan,
Alors le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées (x_I ; y_I) avec :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad ; \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Preuve *Vue en classe… Voir livre p 156 pour la démonstration rédigée.*

EXERCICE TYPE 1 ***Avec les coordonnées d'un milieu***



Enoncé Dans un repère orthonormé, on considère les points A(1 ; –3), B(–2 ; 3), C(7 ; 4) et D(10 ; –2).
Que peut-on dire du quadrilatère ABCD ?

Conjecture Graphiquement, il semble que ABCD soit un parallélogramme…

Solution Calculons les coordonnées des milieux I et J des segments [AC] et [BD] :

$$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1 + 7}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad ; \quad y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{(-3) + 4}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_J = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{(-2) + 10}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad ; \quad y_J = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{3 + (-2)}{2} = \frac{1}{2}$$

Les points I et J ont les mêmes coordonnées : les diagonales [AC] et [BD] ont donc le même milieu.
Or, si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.
Donc ABCD est bien un parallélogramme.

III. Longueur d'un segment

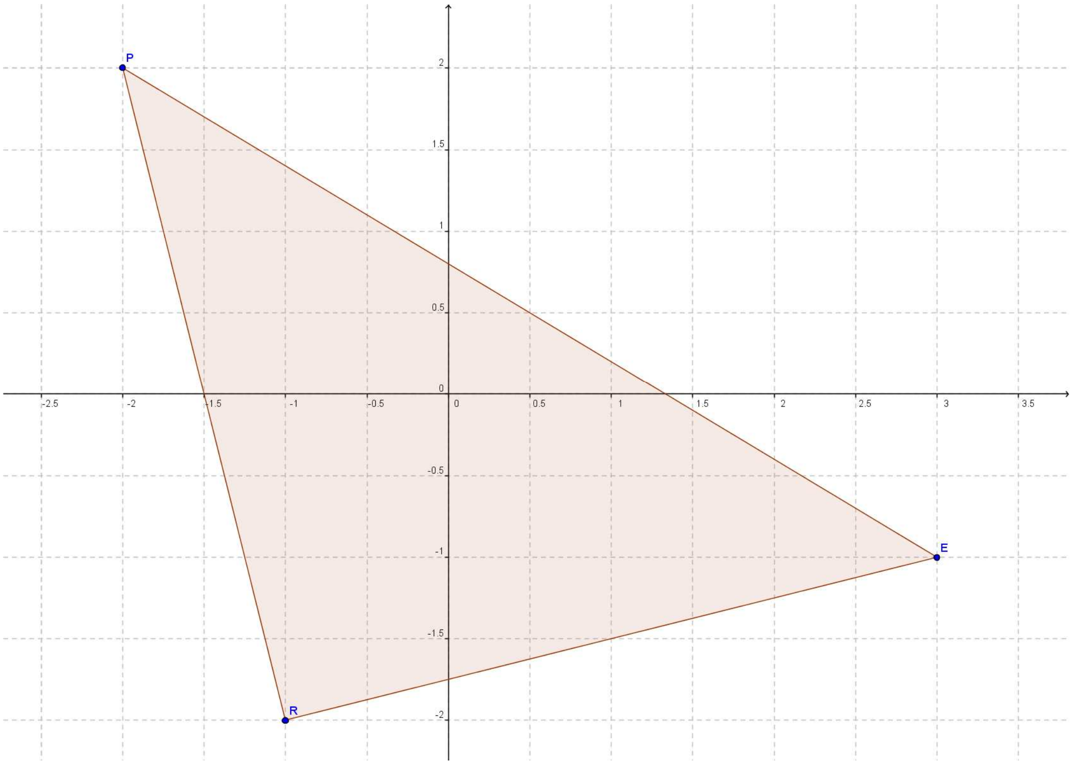
Propriété Dans un repère orthonormé, si A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) sont deux points du plan,
Alors la longueur du segment [AB] est égale à :

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Preuve *Vue en classe… Voir livre p 156 pour la démonstration rédigée.*

EXERCICE TYPE 2 ***Utiliser les longueurs de segments***

Enoncé Dans un repère orthonormé, on considère les points P(−2 ; 2), R(−1 ; −2) et E(3 ; −1).
Que peut-on dire du triangle PRE ?



Conjecture Graphiquement, il semble que le triangle PRE soit rectangle et isocèle en R…

Solution

Calculons les longueurs des trois côtés de ce triangle :

$PR = \sqrt{(x_R - x_P)^2 + (y_R - y_P)^2}$
$PR = \sqrt{((-1) - (-2))^2 + ((-2) - 2)^2}$
$PR = \sqrt{1^2 + (-4)^2}$
$PR = \sqrt{17}$

$ER = \sqrt{(x_R - x_E)^2 + (y_R - y_E)^2}$
$ER = \sqrt{((-1) - 3)^2 + ((-2) - (-1))^2}$
$ER = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2}$
$ER = \sqrt{17}$

$EP = \sqrt{(x_P - x_E)^2 + (y_P - y_E)^2}$
$EP = \sqrt{((-2) - 3)^2 + (2 - (-1))^2}$
$EP = \sqrt{(-5)^2 + 3^2}$
$EP = \sqrt{34}$

- Comme PR = ER = $\sqrt{17}$, le triangle PRE est isocèle en R.
- D'autre part, $PR^2 + ER^2 = 17 + 17 = 34$ et $EP^2 = 34$.
  Comme $PR^2 + ER^2 = EP^2$,
  d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle PRE est rectangle en R.

Conclusion : le triangle PRE est rectangle et isocèle en R.