FICHE n°11
Les grands principes de géométrie dans l'espace

I. Représenter l'espace…

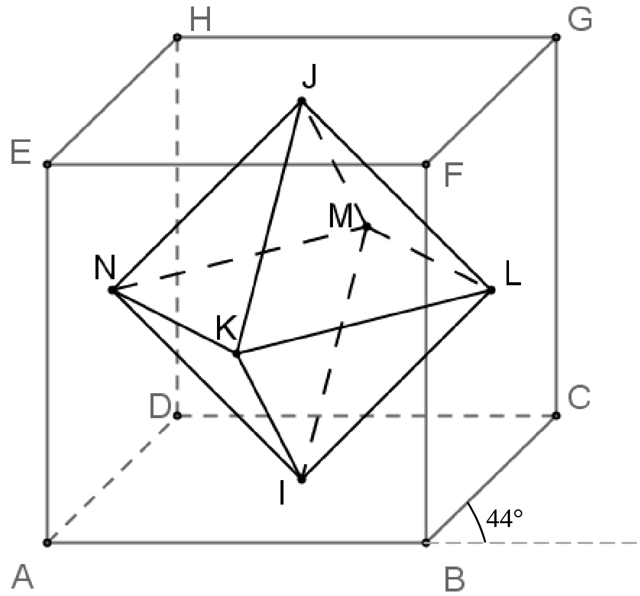
Dans cette leçon, sauf précisions contraires, nous allons plus particulièrement étudier l'octaèdre IKLMNJ ci-dessous construit à partir d'un cube ABCDEFGH de 5 cm de côté, où I, J, K, L, M, N sont les centres respectifs des six faces ABCD, EFGH, ABFE, BCGF, CDHG et DAEH.

1. La perspective cavalière

On a représenté ci-contre ce cube et l'octaèdre associé dans une perspective cavalière (44° ; 0,5).

44° est l'***angle de fuite***.
0,5 est le coefficient de réduction pour la représentation des ***fuyantes*** [AD], [BC], [EH] et [FG] qui sont ***réduites***.

Voir TP « Perspective cavalière et problèmes ».



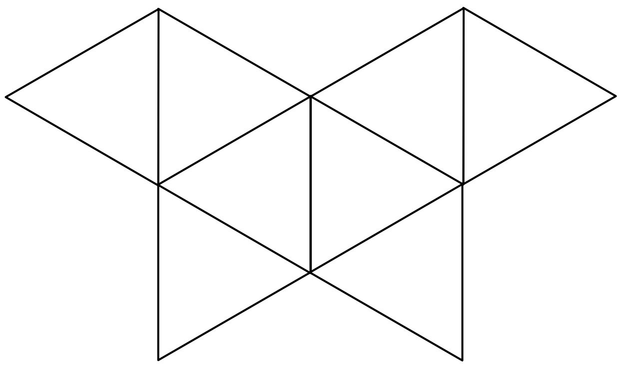
2. Le patron

Pour réaliser le patron de cet octaèdre, il faut avant tout souvent en déterminer certaines caractéristiques…
Pour cela, on utilise la règle 4 du paragraphe 1 et donc tous les théorèmes de géométrie plane…

EXERCICE TYPE 1

1. Démontrer que BE = $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ cm, puis que toutes les faces de cet octaèdre sont des triangles équilatéraux dont la longueur est $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm…
2. Réaliser le patron de cet octaèdre.

Solution **1.** *A faire individuellement pour s'entraîner : Pythagore…*
2. Un patron possible (réduit pour la mise en page de cette leçon) est le suivant :



Remarques ¤ L'objectif d'un patron est de réaliser la figure « en vraie ».
Toutes les longueurs présentes sur un patron sont donc des ***longueurs réelles***.

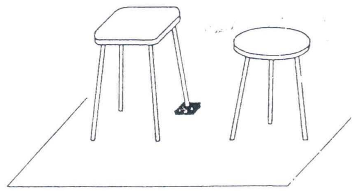
¤ Un même solide peut avoir plusieurs patrons.

L'objectif de la suite de cette fiche est de mettre en évidence des propriétés mathématiques pour résoudre des problèmes de géométrie dans l'espace. Toutes les règles et propriétés énoncées sont admises.

II. Les règles élémentaires

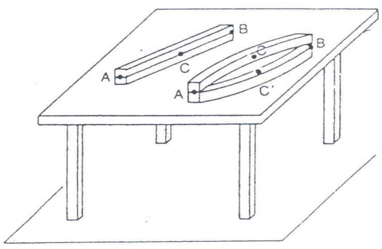
règle 1
Un fil tendu
entre deux mains…

> *Règle 1*
>
> Par deux points distincts A et B de l'espace, il passe une unique droite (AB).



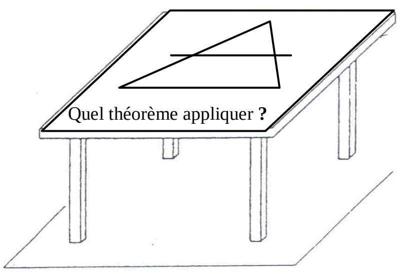
règle 2
Un trépied
n'est jamais bancal…

> *Règle 2*
>
> Par trois points A, B et C non alignés passe un unique plan, noté (ABC).



règle 3
La règle droite est entièrement
posée sur la table plane…

> *Règle 3*
>
> Si un plan contient deux points A et B distincts,
> alors ce plan contient toute la droite (AB).



règle 4
si les droites sont parallèles, on peut
appliquer le théorème de Thalès…

> *Règle 4*
>
> Dans chaque plan de l'espace, on peut appliquer tous les résultats de géométrie plane, notamment ceux vus au collège : théorèmes de Pythagore, théorème de Thalès, trigonométrie, etc.

Définition Des objets (points, droites, …) situés dans un même plan sont dits ***coplanaires***.

Remarque L'objectif en 2nde est souvent de déterminer des objets coplanaires pour appliquer la règle 4.
Nous allons donc étudier les différentes positions possibles entre droites et plans, puis entre droites et enfin entre plans, pour savoir notamment si des objets sont coplanaires ou non…

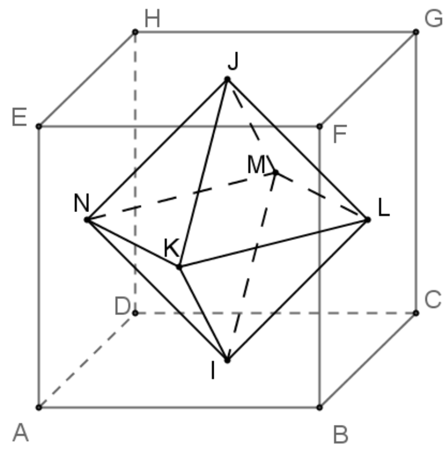
III. *Positions relatives de droites et plans : les règles d'incidence*

1. *Positions relatives de deux droites*

Règle 5 Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.

☞ Si deux droites sont coplanaires, c'est comme en géométrie plane…
Elles sont alors soit ***sécantes***, soit ***strictement parallèles***, soit ***confondues***.
☞ Si deux droites ne sont pas coplanaires, elles sont alors ni sécantes, ni parallèles.

EXERCICE TYPE 2



Préciser les positions relatives de la droite (KJ) avec les droites (KL), (BG) et (EF).

Solution

¤ K appartient aux deux droites (KJ) et (KL).
Ces droites sont donc **sécantes en K** (**et coplanaires)**.

¤ D'après la règle 3, on a : (EG) $\subset$ (EGB)
donc J $\in$ (EGB) et de même K $\in$ (EGB)
Donc la droite (KJ) est inclus dans le plan (EGB)
comme la droite (BG). Elles sont donc **coplanaires**.
D'autre part, dans le plan (EGB),
On sait que K et J sont les milieux respectifs de [EB]et [EG]
D'après le théorème des milieux,
On peut conclure que les droites (KJ) et (GB) sont **parallèles**.

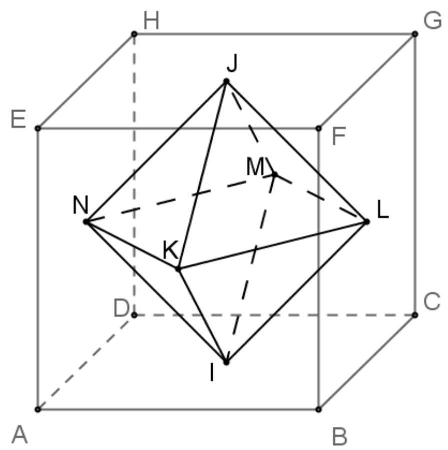
¤ Les droites (KJ) et (EF) sont **non coplanaires** (donc ni parallèles, ni sécantes…)

2. *Positions relatives d'une droite et d'un plan*

Règle 6 Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

☞ Une droite et un plan sécants se coupent ***en un seul point***.
☞ Si une droite est parallèle à un plan, soit elle est ***contenue dans le plan***, soit elle est dite ***strictement parallèle***.

EXERCICE TYPE 3



Préciser les positions relatives de la droite (KJ) avec les plans (ABF), (EGB) et (BCG).

Solution

¤ Le point K appartient à la droite (KJ) et au plan (ABF) : il
Il appartient donc à leur intersection.
Mais le point J n'appartient pas au plan(ABF).
La droite (KJ) et le plan (ABF) sont **sécants en K**.

¤ D'après l'exercice type 2, la droite (KJ) est **contenue dans le plan** (EGB).

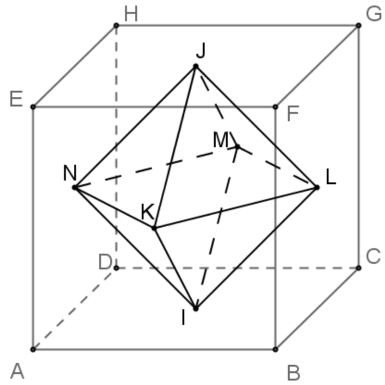
¤ La droite (KJ) est **strictement parallèle** au plan (BCG) car (KJ) // (BG).
Cette affirmation ne pourra être correctement démontrée qu'après avoir vu les propriétés de parallélisme dans l'espace (paragraphe IV. de cette leçon.) ou à l'aide des positions relatives du paragraphe 3. suivant…

3. ***Positions relatives de deux plans***

Règle 7 Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

☞ ***L'intersection*** de deux plans sécants ***est une droite***.
☞ Si deux plans sont parallèles, soit ils sont ***confondus***, soit ils sont dits ***strictement parallèles***.

EXERCICE TYPE 4



Préciser les positions relatives du plan (EFG) avec les plans (FHG), (BDA) et (ACG).

Solution

¤ (EFG) et (FHG) sont des plans qui correspondent à la même face EFGH…
Les plans (EFG) et (FHG) sont **confondus**.

¤ Les plans (EFG) et (BDA) correspondent à deux faces opposées du cube : elles sont donc **strictement parallèles**.

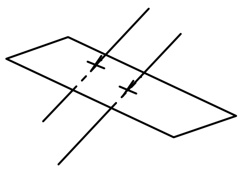
¤ Les points E et G appartiennent aux plans (EFG) et (ACG) donc toute la droite (EG) est incluse dans les deux plans (règle 3).
Les plans (EFG) et (ACG) sont **sécants** et **leur intersection est la droite (EG)**.

IV. Parallélisme dans l'espace

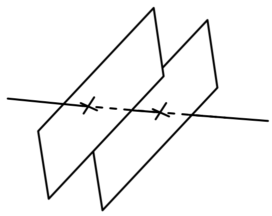
Dans ce paragraphe, les paragraphes ont été organisés selon les conclusions des propriétés afin de répondre aux questions du type : « Quel théorème puis-je utiliser pour pouvoir démontrer que… ? ».
La structure de cette partie est volontairement différente de celle de dans votre livre pour que vous puissiez avoir deux approches pour mieux comprendre…

1. ***Pour démontrer qu'il y a intersection…***

Propriété 1 Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.

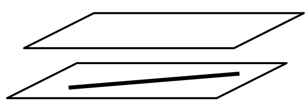


Propriété 2 Si deux plans sont parallèles, alors toute droite qui coupe l'un coupe l'autre.



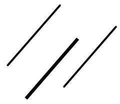
2. ***Pour démontrer qu'une droite et un plan sont parallèles…***

Propriété 3 Si deux plans sont parallèles, alors toute droite de l'un des plans est parallèle à l'autre.

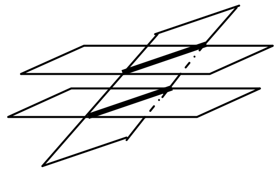


Propriété 4 Si deux droites sont parallèles, alors un plan contenant l'une est parallèle à l'autre.

3. *Pour démontrer que deux droites sont parallèles…*



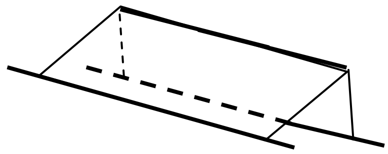
Propriété 5 Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.



Propriété 6 Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

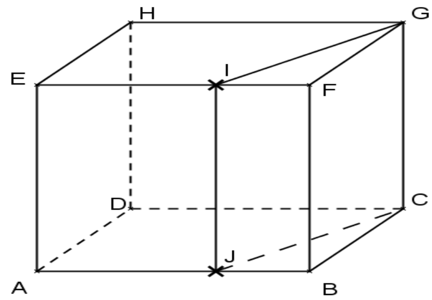
Propriété 7 **Le théorème du toit**

Si deux plans sécants contiennent respectivement deux droites parallèles, alors l'intersection de ces deux plans est une troisième droite parallèle aux deux autres.



EXERCICE TYPE 5

On considère le pavé droit ABDEFGH ci-contre.
I est un point de l'arête [EF].



1. Montrer que la droite intersection du plan (GIC) avec le plan (EAF) est parallèle à (GC).
2. On nomme J le point d'intersection du plan (GIC) avec l'arête [AB]. Justifier que les droites (DH) et (IJ) sont parallèles.

Solution

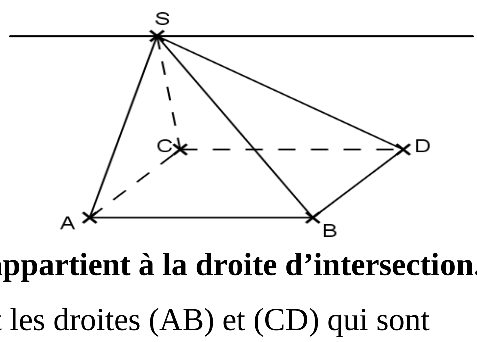
1. Remarquons tout d'abord que I appartient au plan (GIC) et à la face ABFE donc à l'intersection…

   On sait que les plans (DCG) et (ABF) sont parallèles (faces opposées du pavé droit) et que le plan (GCI) coupe le plan (DCG) selon la droite (CG).
   D'après la leçon, si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.
   Donc la droite d'intersection des plans (GIC) et (EAF) est **parallèle à (CG) passant par le point I.**

   Remarque : On aurait pu aussi appliquer le théorème du toit avec les plans (GIC) et (EAF)…

2. ***On sait que*** (GC) est parallèle à (IJ) d'après la question 1. et est aussi parallèle à (DH) puisque ABCDEFGH est un pavé droit.
   D'après la leçon, si deux droites sont parallèles à une même troisième,
   alors elles sont parallèles entre elles.
   Donc, les droites **(IJ) et (DH) sont également parallèles**.

EXERCICE TYPE 6



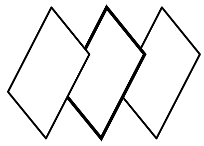
On considère une pyramide ABCDS à base rectangulaire ci-contre.
Déterminer la droite d'intersection des plans (SAB) et (SCD).

Solution

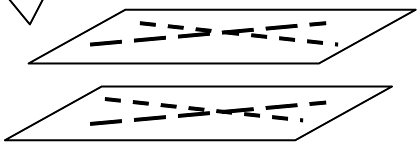
¤ Le point S appartient aux plans (SAB) et (SCD) donc **le point S appartient à la droite d'intersection.**

¤ ***On sait que*** les plans (SAB) et (SCD) contiennent respectivement les droites (AB) et (CD) qui sont parallèles puisque la base ABCD de la pyramide est rectangulaire.
On peut appliquer le théorème du toit.
Donc la **droite d'intersection des plans (SAB) et (SCD) est parallèles à (AB) et (CD)**…

4. *Pour démontrer que deux plans sont parallèles…*

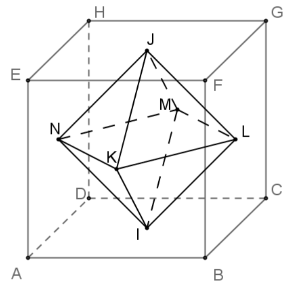


Propriété 8 Si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ces deux plans sont aussi parallèles entre eux.



Propriété 9 Si deux droites sécantes d'un plan sont respectivement parallèles à deux autres droites d'un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles

EXERCICE TYPE 7 On considère l'octaèdre IKLMNJ étudié dans cette leçon.
Démontrer que les faces JKL et INM sont parallèles.

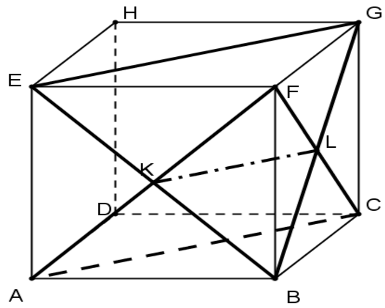


Solution

¤ D'après l'exercice type 2, on sait que (JK) // (GB).
De la même manière, on sait que (IM) // (GB), donc (IM) // (GB).
¤ Par un même raisonnement, on montre que (JL) // (NI).
¤ Le plan (JKL) contient donc deux droites (JK) et (JL) qui sont respectivement parallèles à deux droites (MI) et (NI) du plan (INM). Les faces JKL et INM sont donc bien parallèles.

ANNEXE
CORRECTION des EXERCICES du TP n°7

EXERCICE 1 On considère un parallélépipède rectangle ABCDEFGH.
Déterminer l’intersection des plans (BEG) et (ACF).



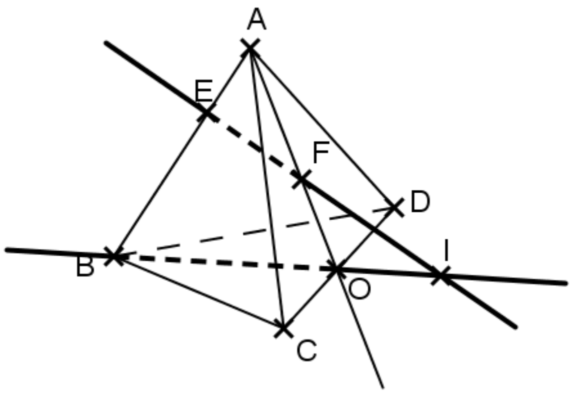
Solution ¤ Le point K est le centre de la face EFBA, c'est-à-dire est le point d’intersection des diagonales [EB] et [AF].

¤ Comme $K \in [EB]$ et $[EB] \subset (BEG)$, on a : $K \in (BEG)$.
Comme $K \in [AF]$ et $[AF] \subset (ACF)$, on a : $K \in (ACF)$
K appartient aux deux plans (BEG) et (ACF) donc à l’intersection de ces deux plans.
De la même manière dans la face BCGF, on a : $L \in (BEG) \cap (ACF)$.

¤ Conclusion : **l’intersection des plans (BEG) et (ACF) est la droite (KL)**.

EXERCICE 2 On considère un tétraèdre ABCD ci-contre.

E est un point de l’arête [AB] et F est un point de la face ACD.
On suppose que la droite (EF) n’est pas parallèle au plan (BCD).
Déterminer le point d’intersection de la droite (EF) et du plan (BDC).



Solution

¤ Pour déterminer cette intersection, on choisit un plan intéressant contenant la droite (EF) : choisissons ici le plan (ABF) car il contient aussi le point E…

¤ On détermine alors l’intersection de ce plan (ABF) avec le plan (BDC) en recherchant deux points communs à ces deux plans :

- ☞ Le point B appartient bien sûr aux deux plans (ABF) et (BDC)…
- ☞ Dans la face ACD, la droite (AF) coupe le segment [CD] en un point O.
  Ce point appartient à (CD) donc au plan (BDC) et à (AF) donc au plan (ABF)…

Les droites (EF) et (BO) sont deux droites coplanaires du plan (ABF) qui ne sont pas parallèle puisque la droite (EF) n’est pas parallèle au plan (BCD).
Ces deux droites sont donc sécantes en un point I qui appartient à la droite (EF) donc au plan (ABF) et à la droite (BO) donc au plan (BCD)…
Conclusion : **Le point d’intersection de la droite (EF) et du plan (BDC) est donc ce point I.**