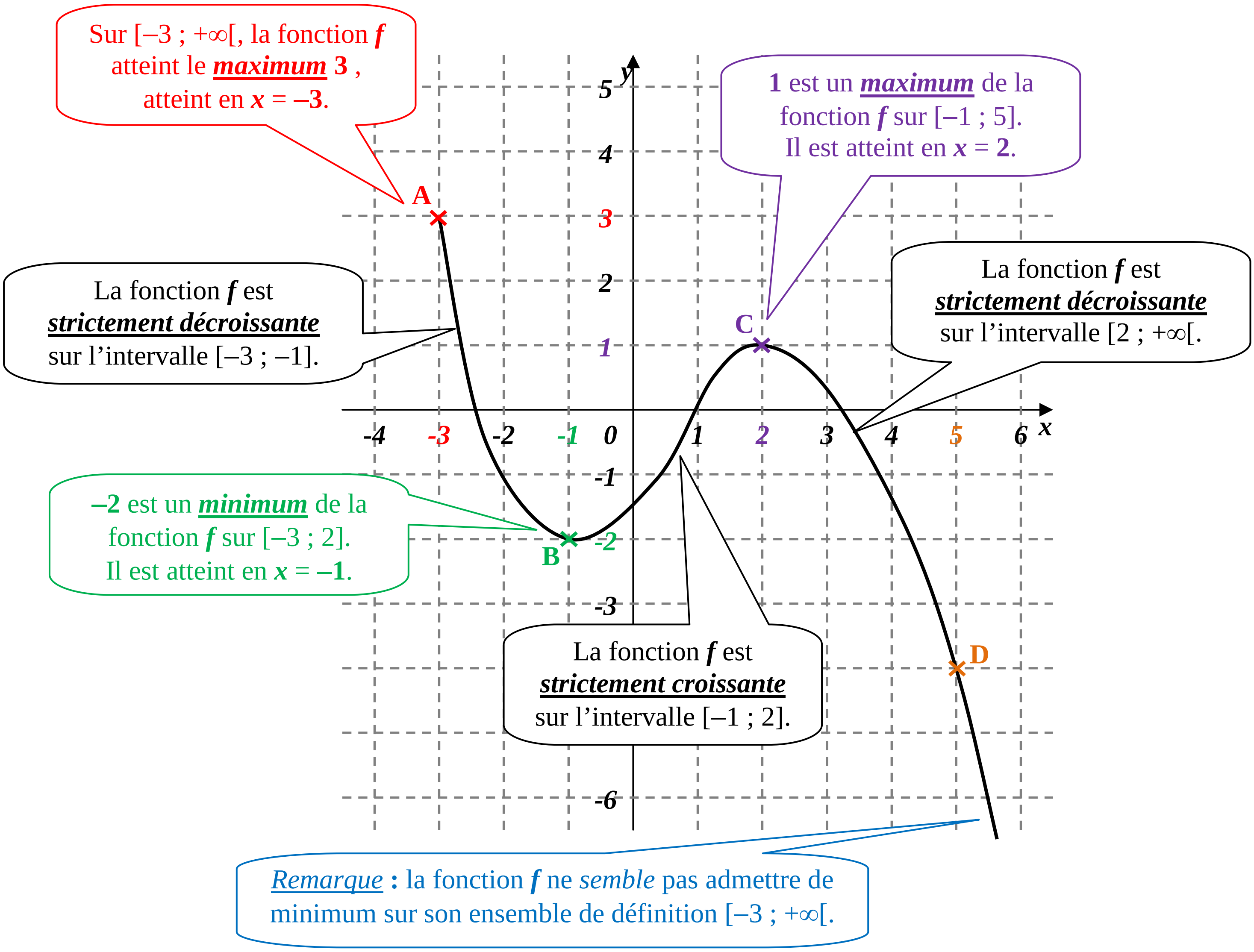
FICHE n°8
Sens de variation d'une fonction et extremum

I. *Observer graphiquement le sens de variations d'une fonction*

<u>*Exemple*</u> On considère une fonction ***f*** définie sur [–3 ; +∞[dont on donne la représentation graphique suivante :



<u>*Définition*</u> Etudier ***le sens des variation*** d'une fonction, c'est indiquer si elle est strictement croissante ou strictement décroissante ou constante avec les intervalles correspondants.
Chercher un ***extremum***, c'est chercher un minimum et/ou un maximum sur l'intervalle donné.
On résume souvent toutes ces informations à l'aide d'un ***tableau de variation***.

EXERCICE TYPE 1 **Dresser un tableau de variation à partir de lectures graphiques**

Dresser le tableau de variation de la fonction ***f*** ci-dessus représentée.

<u>*Solution*</u>

x	**–3**		**–1**		**2**		**+∞**
f (***x***)	**3**	↘	**–2**	↗	**1**	↘	**?**

antécédents « abscisses »

images « ordonnées »

EXERCICE TYPE 2 **Comprendre un tableau de variation**

On considère une fonction g définie sur $[-4 ; 6]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-4		0		2		6
$g(x)$	1	↗	2	↘	-4	↗	4

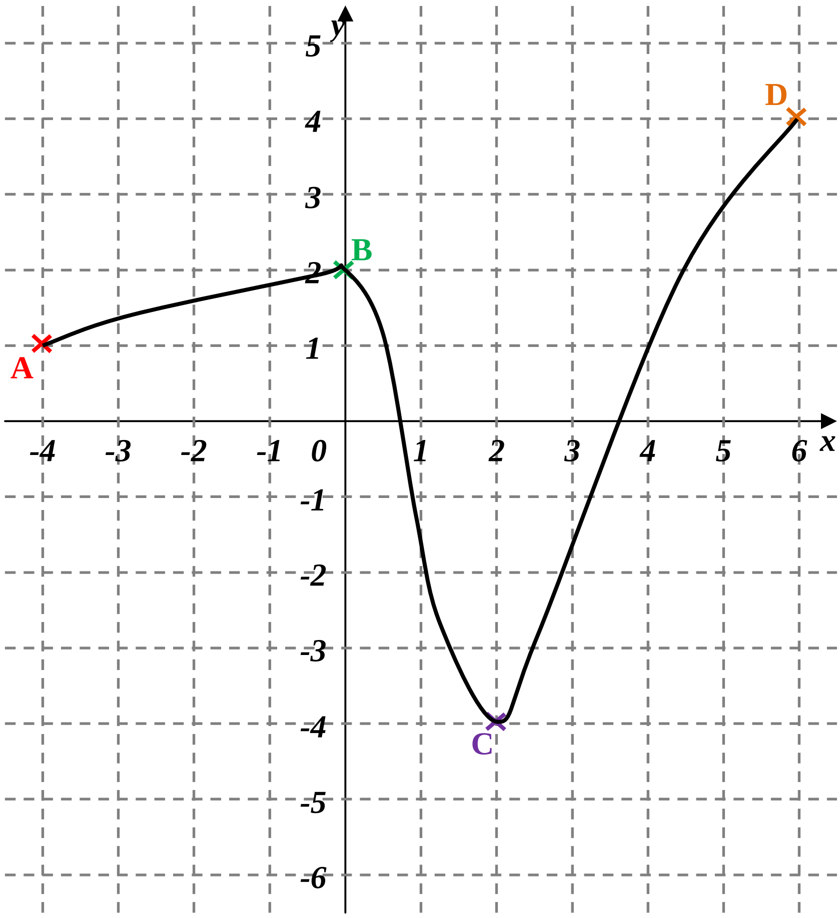
1. Tracer une courbe susceptible de représenter g dans un repère.

2. Pour chacun des intervalles, donner le minimum et le maximum de la fonction g et préciser pour quelles valeurs de x ils sont atteints.

a. sur $[-2 ; 3]$ **b.** sur le domaine de définition $[-4 ; 6]$

Solution

1.



2. a. Sur l'intervalle $[-2 ; 3]$:

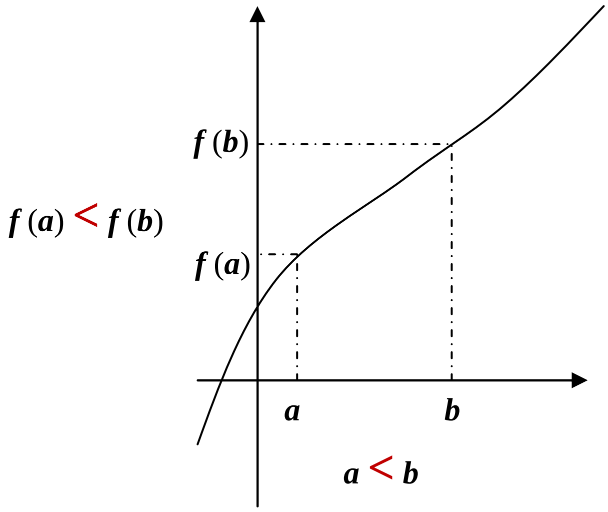
- ☞ la fonction g admet un minimum $\mathbf{-4}$ atteint en $x = \mathbf{2}$
- ☞ et la fonction g admet un maximum $\mathbf{2}$ atteint en $x = \mathbf{0}$

b. Sur le domaine de définition $[-4 ; 6]$:

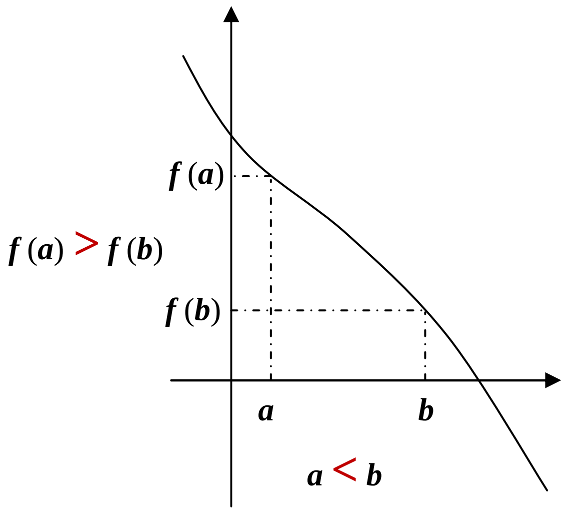
- ☞ la fonction g admet un minimum $\mathbf{-4}$ atteint en $x = \mathbf{2}$
- ☞ et la fonction g admet un maximum $\mathbf{4}$ atteint en $x = \mathbf{6}$

II. *Aspect algébrique des variations d'une fonction*

fonction croissante



fonction décroissante



<u>*Définition*</u> On dit qu'une fonction $\boldsymbol{f}$ est ***strictement croissante*** sur un intervalle I si pour tout nombre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de cet intervalle I tel que $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, on a : $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$

On dit qu'une fonction $\boldsymbol{f}$ est ***strictement décroissante*** sur un intervalle I si pour tout nombre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de cet intervalle I tel que $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, on a : $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) > \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$

<u>*Remarque*</u> Autrement dit, une fonction strictement croissante conserve l'ordre, tandis qu'une fonction décroissante inverse l'ordre…

<u>***EXERCICE TYPE 3***</u> **Comparer des nombres à l'aide des fonctions usuelles**

Pour cet exercice, il peut être nécessaire de revoir les propriétés de certaines fonctions usuelles, notamment la fonction « carré » et la fonction « inverse » de la fiche « Exemples d'étude de fonctions ».

Dans chaque cas, comparer les deux nombres suivants :

a. $(3{,}1)^2$ et $(3{,}0999)^2$; **b.** $(-2{,}\ 1)^2$ et $(-1{,}9)^2$ **c.** $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{\pi}$;

<u>*Solution*</u> On utilise les propriétés des fonctions usuelles :

a. Les nombres 3,1 et 3,0999 sont positifs et la fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x}^2$ est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$.
Comme $3{,}1 > 3{,}0999$, alors on a : $(3{,}1)^2 > (3{,}0999)^2$

b. Les nombres $(-2{,}\ 1)$ et $(-1{,}9)$ sont négatifs et la fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x}^2$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.
Comme $(-2{,}\ 1) < (-1{,}9)$, alors on a : $(-2{,}\ 1)^2 > (-1{,}9)^2$

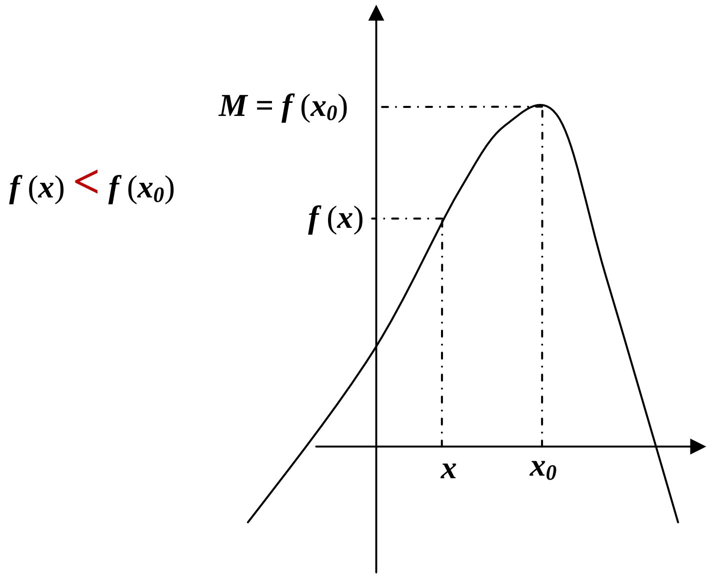
c. Les nombres $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{\pi}$ sont positifs et la fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto \dfrac{1}{\boldsymbol{x}}$ est strictement décroissante sur $[0\ ;+\infty[$.

Comme $3 < \pi$, alors on a : $\dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{\pi}$

III. Aspect algébrique d'un extremum d'une fonction

<u>*Définition*</u> On dit qu'une fonction ***f*** admet un ***maximum M*** sur un intervalle I si :

- Il existe un réel x_0 dans l'intervalle I tel que $M = f(x_0)$;
- pour tout nombre x de cet intervalle I , on a : $f(x) < M$



<u>*Définition*</u> On dit qu'une fonction ***f*** admet un ***minimum m*** sur un intervalle I si :

- Il existe un réel x_0 dans l'intervalle I tel que $m = f(x_0)$;
- pour tout nombre x de cet intervalle I , on a : $f(x) > m$