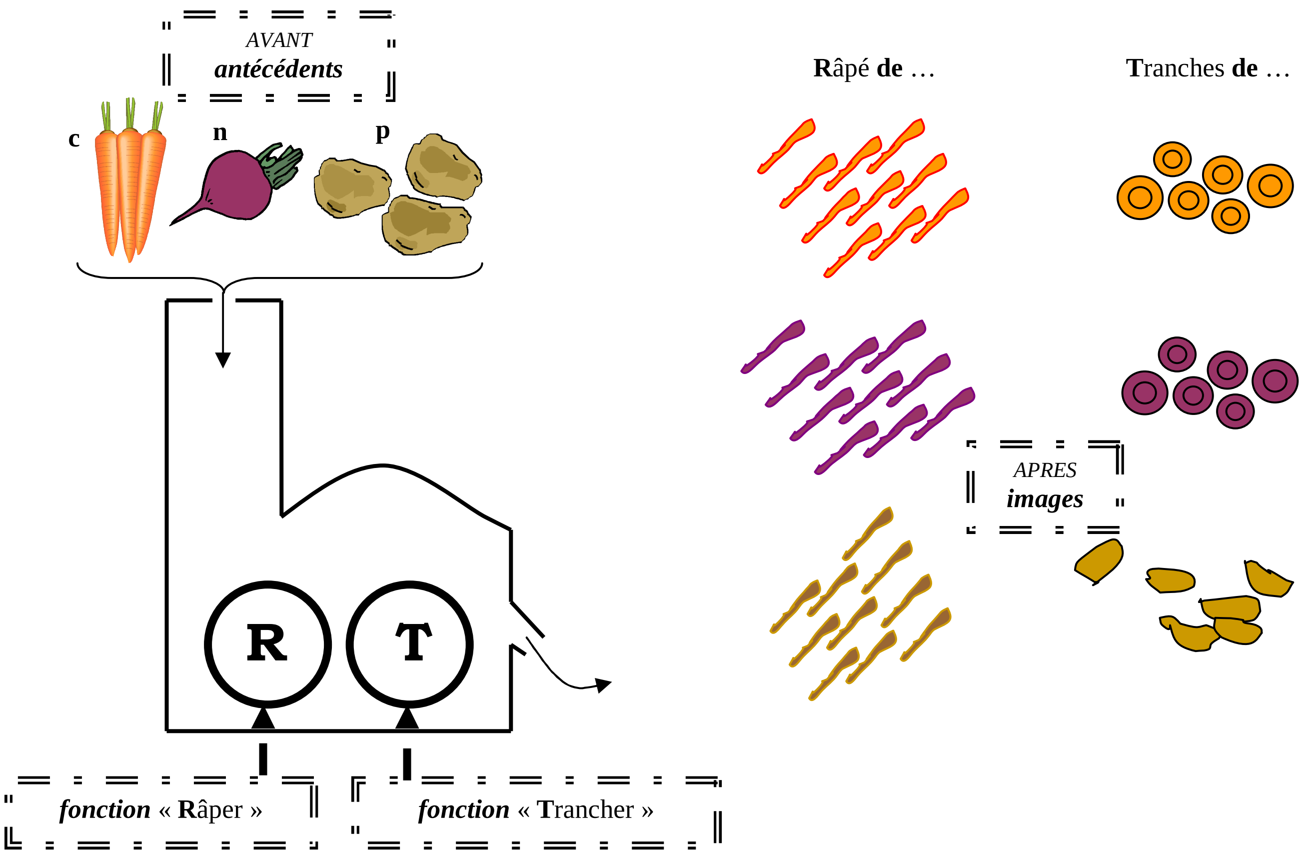
FICHE n°7
Comprendre la notion de fonction

I. *Pour mieux comprendre : avec des « légumes » !*



Le nom de la ***fonction*** précise la transformation que l'on va effectuer…

L'***antécédent*** représente « le légume au départ » et l'***image*** représente « ce que l'obtient à l'arrivée ».

<u>Notation</u>

$$\mathbf{R} : \mathbf{c} \mapsto \mathbf{R(c)}$$

nom de la fonction

départ

arrivée

on dit « **R de c** »

II. En mathématiques : avec des nombres…

Dans cette partie, on considère la fonction $\boldsymbol{p}$ définie par le programme de calcul suivant :

« *Je pense à un nombre compris entre* (–3) *et* 4.
Je calcule le carré de ce nombre et je soustrais 5 *au résultat*. »

1. ***La formule***

On note : $\boldsymbol{p : x \longmapsto p(x) = x^2 - 5}$ et on dit : « la fonction $\boldsymbol{p}$ qui à $\boldsymbol{x}$ associe $\boldsymbol{x^2 - 5}$ »

$\boldsymbol{p}$: nom de la « ***fonction*** »

$\boldsymbol{x}$: variable du départ « ***antécédent*** »

$\boldsymbol{p(x)}$: nombre d'arrivée « ***image de x par la fonction p*** »

EXERCICE TYPE 1 ***Calculer l'image d'un nombre***

Calculons l'image de **2** par la fonction $\boldsymbol{p}$:

$\boldsymbol{p}(\mathbf{2}) = \mathbf{2}^2 - 5 = 4 - 5 = -1$

On remplace $\boldsymbol{x}$ par **2**

L'image de **2** par la fonction $\boldsymbol{p}$ est **–1**.

EXERCICE TYPE 2 ***Déterminer le(s) antécédent(s) d'un nombre***

Déterminons le(s) antécédent(s) de **7** par la fonction $\boldsymbol{p}$:

$\boldsymbol{p}(x) = \mathbf{7}$
$\boldsymbol{x^2 - 5 = 7}$
$\boldsymbol{x^2 = 12}$
$\boldsymbol{x} = -\sqrt{\mathbf{12}}$ et $\boldsymbol{x} = \sqrt{\mathbf{12}}$

Il faut trouver le (ou les) nombre(s) $\boldsymbol{x}$ tel que $\boldsymbol{p}(x) = \mathbf{7}$.
On résout donc une équation…

7 semble avoir ici deux antécédents par la fonction $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{x} = -\sqrt{\mathbf{12}}$ et $\boldsymbol{x} = \sqrt{\mathbf{12}}$.

Avant de conclure, il faut que je vérifie que ces nombres sont dans le ***domaine de définition*** de la fonction. D'après le programme $\boldsymbol{p}$ de calcul, le nombre $\boldsymbol{x}$ doit être compris entre (–3) et 4 : on note $\mathbf{D}\boldsymbol{p} = [-3 ; 4]$.

Comme $-\sqrt{\mathbf{12}} \approx -3{,}5$, ce nombre n'appartient pas au domaine de définition et ne peut donc pas être un antécédent…

Conclusion : par la fonction $\boldsymbol{p}$, **7** a un seul antécédent possible : $\boldsymbol{x} = \sqrt{\mathbf{12}}$.

Vérification : $\boldsymbol{p}(\sqrt{12}) = (\sqrt{12})^2 - 5 = 12 - 5 = 7$

2. ***Le tableau de valeurs***

EXERCICE TYPE 3 ***Obtenir un tableau de valeurs à partir de la formule***

Pour chaque nombre $\boldsymbol{x}$ proposé dans le tableau, on calcule son image avec la formule :

$\boldsymbol{x}$	– 3	– 2	– 1	0	**1**	2	3
$\boldsymbol{p}(x)$	4	– 1	– 4	– 5	**– 4**	– 1	4

$\boldsymbol{p}(\mathbf{2}) = \mathbf{2}^2 - 5 = 4 - 5 = -1$

A partir de ce tableau de valeurs, on peut dire par exemple que :

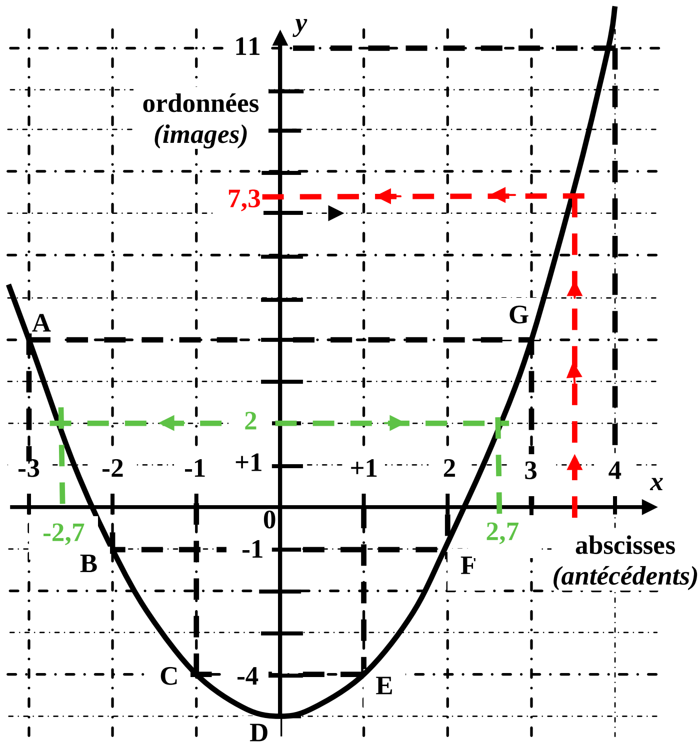
- L'image de (–2) par la fonction $\boldsymbol{f}$ est (–1).
- Un antécédent de (–4) est 1.
  Attention, il peut y avoir plusieurs antécédents : ici, (–4) a deux antécédents (–1) et 1.

3. *La représentation graphique*

Dans un repère, le tableau de valeurs permet de placer quelques points de la ***courbe représentative de la fonction p***, à partir desquels on peut ensuite tracer la courbe.

x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4	x
$p(x)$	4	– 1	– 4	– 5	– 4	– 1	4	11	y
point	A	B	C	D	E	F	G	H	**M**

Dire que
*« **M**(x ; y) appartient à la courbe (C**p**) »*
revient à dire que
« $y = p(x)$ »



Remarque L'ensemble de définition de la fonction p correspond graphiquement à l'ensemble de toutes les abscisses des points de la courbe.
Ici, l'***ensemble de définition*** est bien l'intervalle [–3 ; 4].

Valeurs exactes ou approchées

Une lecture graphique ne permet d'obtenir que des valeurs approchées (sauf dans le cas où un point est clairement précisé).
D'une manière générale, c'est à partir de la formule que l'on peut obtenir des valeurs exactes…

EXERCICE TYPE 4 ***Déterminer graphiquement l'image d'un nombre***

Déterminons graphiquement l'image de **3,5** par la fonction ***p*** :

Méthode On cherche l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse **3,5**.
On indique par des pointillés notre analyse graphique…

Conclusion Graphiquement, l'image de **3,5** par la fonction ***p*** est environ **7,3**.

EXERCICE TYPE 5 ***Déterminer graphiquement le(s) antécédent(s) d'un nombre***

Déterminons graphiquement le(s) antécédent(s) de **2** par la fonction ***p*** :

Méthode On cherche l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée **2**.
On indique par des pointillés notre analyse graphique…

Conclusion Graphiquement, le nombre **2** a deux antécédents par la fonction ***p*** qui sont approximativement : $x \approx -2{,}7$ et $x \approx 2{,}7$.

III. Comparaison graphique de deux fonctions

<u>*Pour comprendre*</u>

- ***« Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ »*** veut dire la même chose que :
  - *« Trouver tous les réels x dont l'image par f est la même que celle par g » ;*
  - *« Trouver les <u>abscisses des points d'intersection</u> des courbes (Cf) et (Cg). ».*

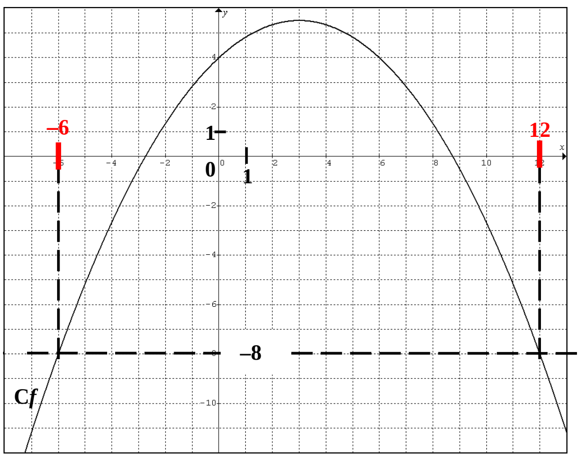
- ***« Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$ »*** veut dire la même chose que :
  - *« Trouver tous les réels x dont l'image par f est strictement inférieure à celle par g » ;*
  - *« Trouver les abscisses des points de la courbe (Cf) dont l'ordonnée est strictement inférieure à celle du point de même abscisse de la courbe (Cg) ».*
  - *« Trouver les abscisses pour lesquels la courbe (Cf) est <u>en-dessous</u> de la courbe (Cg) »*

f (x) < g(x)

<u>*EXERCICE TYPE 6*</u>

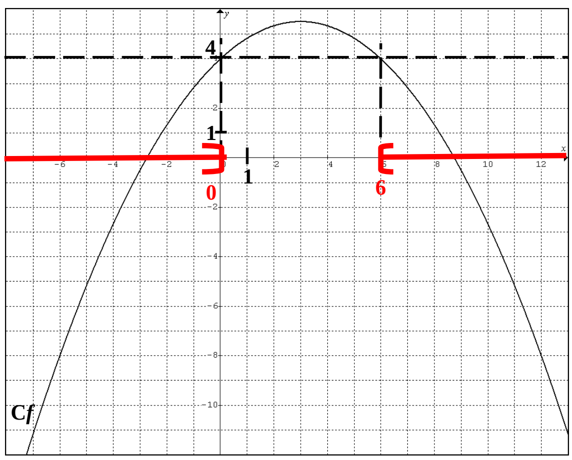
On considère une fonction *f* définie sur ℝ et représentée ci-dessous par la courbe C*f* et une fonction affine *g* représentée ci-dessous par la droite *d* .
Dans chaque cas, représenter **en rouge** graphiquement les solutions sur le graphique, puis conclure…

Résoudre l'équation $f(x) = -8$



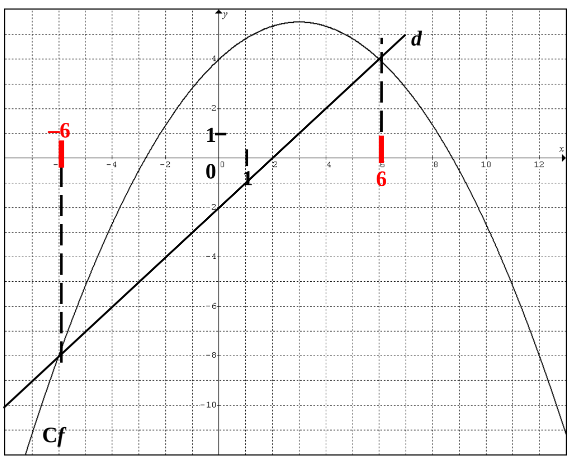
Graphiquement, l'équation $f(x) = -8$ a **deux solutions** qui sont approximativement :
$\boldsymbol{x \approx -6}$ et $\boldsymbol{x \approx 12}$.

Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 4$



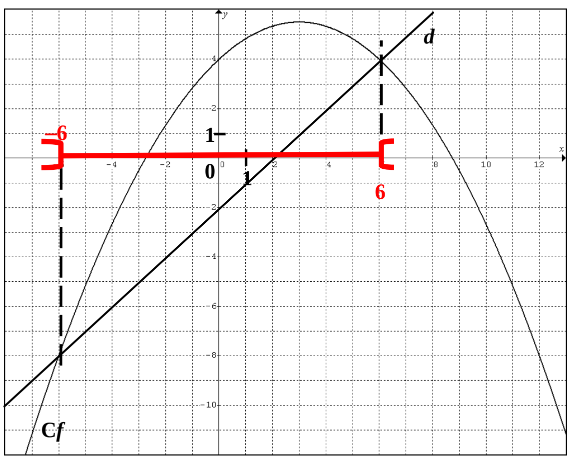
Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 4$ sont approximativement tous les réels x appartenant à $\boldsymbol{]-\infty\ ;\ 0] \cup [6\ ;\ +\infty[}$.

Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$



Graphiquement, l'équation $f(x) = g(x)$ a **deux solutions** qui sont approximativement:
$\boldsymbol{x \approx -6}$ et $\boldsymbol{x \approx 6}$.

Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$



Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont approximativement tous les réels x appartenant à l'intervalle $\boldsymbol{]-6\ ;\ 6\ [}$.