2^{nde}

FICHE n°6

Inéquations et études de signes

I. Résoudre une inéquation du type « ax+b < cx+d »

Méthode Pour résoudre une inéquation du type « ***ax+b < cx+d*** », on la transforme par étapes pour obtenir une inégalité de la forme "***x < s***" ou "***x > s***" (où ***s*** est un nombre à déterminer).

Pour qu'à chaque étape les inéquations obtenues aient les mêmes solutions, on applique les règles suivantes :

On **CONSERVE LE SENS** d'une inégalité si :

- ☞ On **ajoute** ou **soustrait** un même nombre aux deux membres d'une inégalité ;
- ☞ On **multiplie ou divise** par un même nombre **strictement POSITIF** les deux membres d'une égalité.

On **CHANGE LE SENS** d'une inégalité si :

- ☞ On **multiplie ou divise** par un même nombre **strictement NEGATIF** les deux membres d'une égalité.

EXERCICE TYPE 1 ***Résoudre l'inéquation $3x + 1 > 7x - 2$.***

Solution détaillée

☞ On regroupe les x en soustrayant $3x$ à chaque membre. On obtient : $1 > 7x - 2 \mathbf{- 3x}$

On réduit : $1 > 4x \mathbf{- 2}$

☞ On isole les x en ajoutant 2 à chaque membre. On obtient : $1 \mathbf{+ 2} > 4x$

On réduit : $3 > \mathbf{4}x$

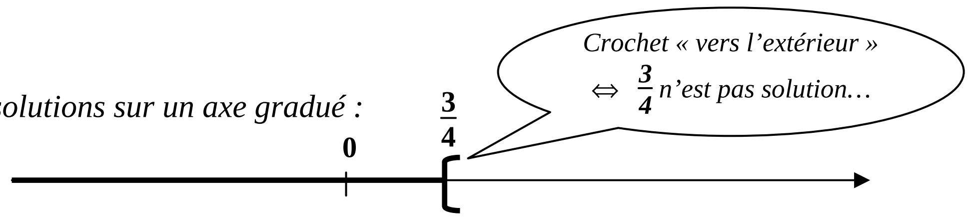
☞ On termine en divisant par 4 chaque membre.

Comme 4 est **POSITIF** donc **on conserve le sens**, d'où : $\mathbf{\frac{3}{4}} > \boldsymbol{x}$ ou $\boldsymbol{x} < \mathbf{\frac{3}{4}}$

Conclusion : $\boxed{\mathbf{S =]-\infty ; \frac{3}{4} [}}$

Représentation graphique des solutions sur un axe gradué :

Les solutions sont **en gras** :



EXERCICE TYPE 2 ***Résoudre l'inéquation $-6x + 4 \leq 9$.***

Solution

☞ On isole les x en soustrayant 4 à chaque membre. On obtient : $-6x \leq 9 \mathbf{- 4}$

On réduit : $-6x \leq 5$

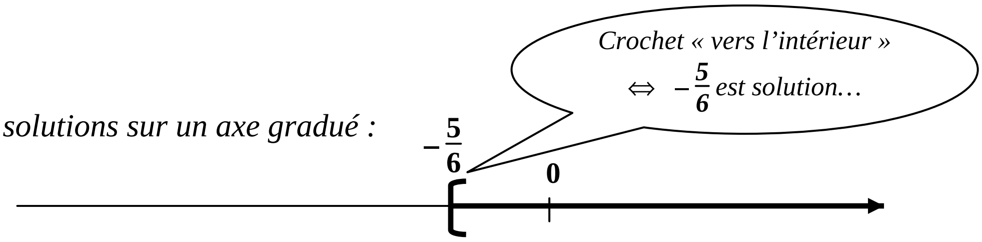
☞ On termine en divisant par (-6) chaque membre.

Comme (-6) est **NEGATIF** donc **on change le sens**, d'où : $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{\frac{5}{-6}}$ ou $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{-\frac{5}{6}}$

Conclusion : $\boxed{\mathbf{S = [-\frac{5}{6} ; +\infty [}}$

Représentation graphique des solutions sur un axe gradué :

Les solutions sont **en gras** :



II. Fonctions et résolution graphique d'inéquations du type f(x) < b ou f(x) ≥ g(x)

➔ Voir la fiche « Comprendre la notion de fonction ».

III. Signe d'une expression du type « ax + b »

<u>*A savoir*</u> Le signe d'une expression $ax + b$ suivant les valeurs de x est donné par le tableau de signes suivant :

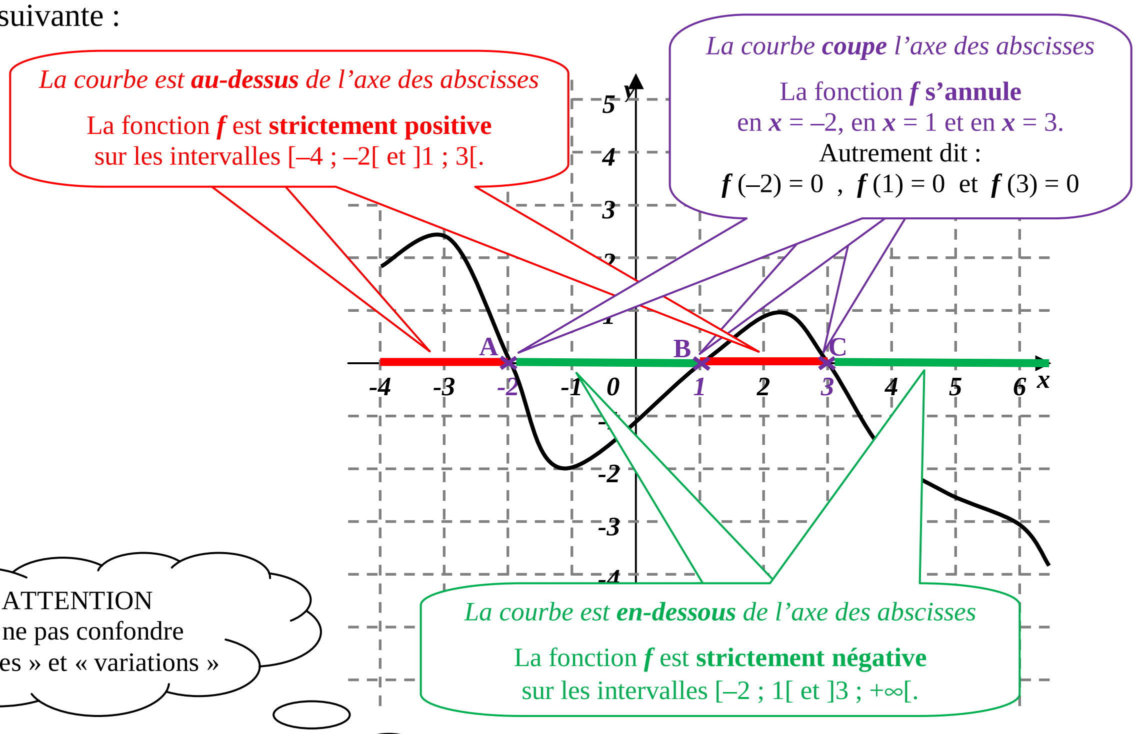
x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		**Signe de –a**	0	**Signe de a**	

<u>*Preuve*</u> Ce tableau correspond aux observations graphiques, mais cela ne constitue pas une preuve…
Par le calcul :
$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff$

- si $a > 0$, alors on conserve le sens de l'inégalité : $x > -\dfrac{b}{a}$
- si $a < 0$, alors on change le sens de l'inégalité : $x < -\dfrac{b}{a}$

IV. Lecture graphique du signe d'une fonction

<u>*Exemple*</u> On considère une fonction f définie sur $[-4 ; +\infty[$ dont on donne la représentation graphique suivante :



ATTENTION
de ne pas confondre
« signes » et « variations »

<u>*EXERCICE TYPE 3*</u> **Lecture graphique d'un tableau de signes**

On commence par chercher les valeurs de x qui annulent la fonction

Dresser le tableau de signes de la fonction f ci-dessus représentée.

<u>*Solution*</u>

x	-4		-2		1		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	–	0	+	0	–	

V. *Résolution algébrique d'inéquations du type* $(ax+b)(cx+d) \geq 0$ *ou* $\dfrac{ax+b}{cx+d} < 0$

Méthode Résoudre ces inéquations (par rapport à 0) revient à étudier leur signe…

Pour déterminer le tableau de signe d'une expression produit, on réalise un tableau de signe en appliquant la règle des signes d'un produit…

Pour toutes les expressions du type $\boldsymbol{ax+b}$, on utilisera en particulier le paragraphe ci-dessus « signe d'une expression du type $\boldsymbol{ax + b}$ ».

Remarque ***IMPORTANT***

Avant de réaliser un tableau de signes, on cherche d'abord, si elles existent :

- ☞ le(s) valeur(s) interdite(s) : voir fiche « *Exemples de fonctions* » (paragraphe I.)
- ☞ le(s) valeur(s) de x qui annule(nt) l'expression…

EXERCICE TYPE 4 **Résoudre une « inéquation produit »**

Enoncé Résoudre l'inéquation $(-2x-1)(3x-2) > 0$.

Solution *Résoudre cette inéquation revient à chercher pour quelle(s) valeur(s) de x, cette expression est strictement positive… Cela revient donc à étudier son signe.*

Avant de réaliser le tableau de signes, on cherche les valeurs qui annulent l'expression :

$-2x-1 = \;\Leftrightarrow\; x = -\dfrac{1}{2}$; $3x-2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{2}{3}$.

On peut désormais étudier le signe dans un tableau grâce au paragraphe III. ci-dessus :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-2x-1$		+	0	–		–	
$3x-2$		–		–	0	+	
$(-2x-1)(3x-2)$		–	0	+	0	–	

Ce tableau de signes signifie que :

- ➢ $(-2x-1)(3x-2) < 0$ pour tous les nombres x de $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$
- ➢ $(-2x-1)(3x-2) = 0$ pour $x = -\frac{1}{2}$ et pour $x = \frac{2}{3}$
- ➢ $(-2x-1)(3x-2) > 0$ pour tous les nombres x de $\left]-\frac{1}{2}\,;\frac{2}{3}\right[$

On peut donc conclure que les solutions de l'inéquation $(-2x-1)(3x-2) > 0$ sont :

$$\mathbf{S} = \left]-\frac{1}{2}\,;\frac{2}{3}\right[$$

EXERCICE TYPE 5 **Résoudre une « inéquation quotient »**

Enoncé Résoudre l'inéquation $\dfrac{-2x+3}{3x+7} \leq 0$.

Solution *Avant de réaliser le tableau de signes d'un quotient, on cherche :*

- ☞ les valeurs interdites (qui annulent le dénominateur ; on ne peut pas diviser par 0…) :

$$3x+7 = 0 \iff 3x = -7 \iff x = -\frac{7}{3} \quad .$$

- ☞ les valeurs qui annulent le numérateur :

$$-2x+3 = 0 \iff -2x = -3 \iff x = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} .$$

On peut désormais étudier le signe dans un tableau grâce au paragraphe I. ci-dessus :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$3x+7$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-2x+3$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$\dfrac{-2x+3}{3x+7}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

On peut donc conclure que les solutions de l'inéquation $\dfrac{-2x+3}{3x+7} \leq 0$ sont :

$$\mathbf{S =]-\infty ; -\frac{7}{3}[\cup [\frac{3}{2} ; +\infty[}$$

EXERCICE TYPE 6 **Résoudre une « inéquation complexe »**

Enoncé Résoudre l'inéquation $\dfrac{4x+17}{3x+7} \leq 2$

Méthode Pour pouvoir résoudre cette inéquation, il faut d'abord la transformer en une équation du type ci-dessus (en comparant par rapport à 0 et avec une forme produit ou quotient).

Solution

$\dfrac{4x+17}{3x+7} \leq 2 \iff \dfrac{4x+17}{3x+7} - 2 \leq 0$ *On modifie l'inéquation pour qu'un des membres soit 0*

$\iff \dfrac{4x+17}{3x+7} - \dfrac{2(3x+7)}{3x+7} \leq 0$ *On transforme le membre de gauche sous la forme* $\dfrac{ax+b}{cx+d}$

$\iff \dfrac{4x+17-2(3x+7)}{3x+7} \leq 0$

$\iff \dfrac{4x + 17 - 6x - 14}{3x+7} \leq 0$

$\iff \dfrac{-2x+3}{3x+7} \leq 0$

Pour la suite de cette résolution, voir l'exercice type 5 précédent…