FICHE n°5
Résoudre une équation ou un système d'équations

I. Equations du 1er degré

Méthode

Pour résoudre une équation du 1er degré, on utilise les règles suivantes pour conserver l'égalité :
- ☞ On ajoute ou on soustrait un même nombre aux deux membres de l'égalité ;
- ☞ On multiplie ou on divise par un même nombre (différent de 0) les deux membres de l'égalité.

Exemple détaillé Résoudre l'équation $3x + 1 = 7x - 2$.

☞ Pour « regrouper les x » dans un même membre, on soustrait $3x$ à chaque membre de l'égalité :

$$3x + 1 \mathbf{- 3x} = 7x - 2 \mathbf{- 3x}$$

On réduit : $1 = 4x \mathbf{- 2}$

☞ De la même manière, on ajoute 2 à chaque membre de l'égalité :

$$1 \mathbf{+ 2} = 4x - 2 \mathbf{+ 2}$$

On réduit : $3 = \mathbf{4}x$

☞ On divise par 4 chaque membre de l'égalité :

$$3 \div \mathbf{4} = 4x \div \mathbf{4}$$

On obtient : $\frac{3}{4} = x$ ou encore $x = \frac{3}{4}$

Conclusion : L'équation $3x + 1 = 7x - 2$ a une solution : $x = \frac{3}{4}$.

On note : $\mathbf{S} = \left\{ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \right\}$

II. Equations du type $x^2 = a$

Propriétés La carré d'un nombre non nul est toujours strictement positif.

Preuve D'après la règle des signes pour la multiplication de deux nombres relatifs, le produit de deux nombres de même signe est un nombre positif…

Conséquences

Soit $\boldsymbol{a}$ un nombre donné.
- ✓ Si $\boldsymbol{a}$ est négatif, l'équation $\boldsymbol{x^2 = a}$ n'a aucune solution.
- ✓ Si $\boldsymbol{a = 0}$, l'équation $\boldsymbol{x^2 = 0}$ a une seule solution : $\boldsymbol{x = 0}$.
- ✓ Si $\boldsymbol{a}$ est positif, l'équation $\boldsymbol{x^2 = a}$ a deux solutions $\boldsymbol{x = -\sqrt{a}}$ et $\boldsymbol{x = \sqrt{a}}$.

Exemples

1. L'équation $\boldsymbol{x^2 = -\pi}$ n'a <u>aucune solution</u>. On note : $\mathbf{S} = \varnothing$
2. L'équation $\boldsymbol{x^2 = 169}$ a <u>deux solutions</u> : $\boldsymbol{x = -\sqrt{169} = -13}$ et $\boldsymbol{x = \sqrt{169} = 13}$. $\mathbf{S} = \{ \mathbf{-13 , 13} \}$
3. L'équation $\boldsymbol{(x + 2)^2 = 0}$ revient à : $\boldsymbol{x + 2 = 0}$ et donc à : $\boldsymbol{x = -2}$.
   L'équation $\boldsymbol{(x + 2)^2 = 0}$ a donc <u>une seule solution</u> : $\boldsymbol{x = -2}$. $\mathbf{S} = \{ \mathbf{-2} \}$

III. *Résoudre une « équation-produit »*

<u>*Propriété*</u> Si un produit est égal à 0, alors l'un de ces facteurs est égal à 0.

EXERCICE TYPE Résoudre l'équation $(3\boldsymbol{x} - 1)(7\boldsymbol{x} + 2) = 0$.

Solution : Si un produit est nul, alors l'un de ces facteurs est nul.

Donc : soit $3\boldsymbol{x} - 1 = 0$ soit $7\boldsymbol{x} + 2 = 0$

$3\boldsymbol{x} = 1$ $\quad$ $7\boldsymbol{x} = -2$

$\boldsymbol{x} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $\boldsymbol{x} = -\frac{2}{7}$ donc $\mathbf{S} = \left\{-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}\ ,\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right\}$

IV. *Transformer une écriture littérale pour résoudre une équation*

<u>*Remarque*</u> Pour résoudre une équation, on a souvent intérêt à modifier cette équation pour obtenir une forme comme celles décrites dans les paragraphes précédents (1^er^ degré, $\boldsymbol{x^2 = a}$, équation-produit, …).

EXERCICE TYPE ***Choisir l'écriture littérale la plus adaptée pour résoudre une équation donnée***

On considère l'expression $P(x) = 2x^2 + 12x + 10$.

a. Montrer que, pour tout réel x, on a : $P(x) = 2(x + 3)^2 - 8 = 2(x + 5)(x + 1)$

b. Résoudre les trois équations suivantes : (i) $P(x) = 0$ (ii) $P(x) = 10$ (iii) $P(x) = -8$

<u>*Solution*</u>

1. Avant d'effectuer des calculs, il faut essayer de <u>trouver les transformations les plus adaptées</u>.

¤ Par exemple, développons $2(x + 3)^2 - 8$:

$$2(x + 3)^2 - 8 = 2(x^2 + 6x + 9) - 8 = 2x^2 + 12x + 18 - 8 = 2x^2 + 12x + 10 = P(x)$$

¤ Pour obtenir la forme factorisée, il y a par exemple ici deux méthodes possibles :
(une seule méthode suffit bien sûr !)

Méthode 1 : Développer $2(x + 5)(x + 1)$ pour trouver la forme initiale de $P(x)$

Méthode 2 : Utiliser $2(x + 3)^2 - 8$ avec l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

Par exemple, avec la méthode 2, on obtient :

$$2(x+3)^2 - 8 = 2\,[(x+3)^2 - 4] = 2[(x+3)^2 - 2^2] = 2[(x+3) - 2][(x+3) + 2] = 2(x + 1)(x + 5)$$

2. Avant d'effectuer des calculs, il faut <u>chercher la forme la plus adaptée</u> à l'équation donnée…

(i) Pour $P(x) = 0$, utilisons la forme factorisée $P(x) = 2(x + 5)(x + 1)$ …

Pour s'entraîner : vérifier que $\mathbf{S} = \{\mathbf{-5}\ ,\ \mathbf{-1}\}$

(ii) Pour $P(x) = 10$, utilisons la forme développée $P(x) = 2x^2 + 12x + 10$ …

En effet, on a ainsi :

$2x^2 + 12x + 10 = 10$ *On ajoute 4 dans les deux membres de l'égalité…*

$2x^2 + 12x = 0$ *On factorise par x pour obtenir une équation-produit…*

$2x(x + 6) = 0$ *On résout l'équation-produit obtenue…*

Pour s'entraîner : vérifier que $\mathbf{S} = \{\mathbf{0}\ ,\ \mathbf{-6}\}$

(iii) Pour $P(x) = -8$, utilisons la forme $P(x) = 2(x + 3)^2 - 8$ …

Pour s'entraîner : vérifier que $\mathbf{S} = \{\mathbf{-3}\}$

V. *Fonctions et résolution graphique d'équations du type f(x) = b ou f(x) = g(x)*

➔ Voir la fiche « Comprendre la notion de fonction ».