FICHE n°1
Probabilités

I. L'objet des probabilités

« Le fait que des évènements se produisent au hasard n'implique pas une totale absence d'ordre ! »

Exemples

- ✓ Assurances : les responsables d'une compagnie d'assurances ne peuvent pas savoir qui, parmi leurs clients, aura un accident de voiture, mais ils peuvent prévoir qu'environ 5 % d'entre eux seront victimes d'un sinistre, ce qui permet de fixer le montant des primes.
- ✓ Production industrielle : Après avoir recensé les différents types de défaillance d'un système, on décrit le comportement d'un système de production et on montre comment le dysfonctionnement de chaque composant perturbe le fonctionnement général. Grâce à cette étude, on détermine le risque de panne du système entier, à partir du risque de panne de chaque composant.

D'après *Pour la Sciences*, avril 1996.

II. Le vocabulaire des probabilités

1. Le langage des évènements

Définitions

- ❖ ***Expérience aléatoire*** : expérience soumise au hasard conduisant à plusieurs résultats ω_1 , ω_2 ,…, ω_n. Un de ces résultats possibles est appelé ***éventualité*** ou ***issue***.
- ❖ ***Univers*** : ensemble des éventualités ou issues possibles. On le note souvent $\Omega = \{ \omega_1 , \omega_2 , \dots , \omega_n \}$.
- ❖ ***Evènement élémentaire*** : toute partie de l'univers Ω composé d'une seule éventualité.
- ❖ ***Evénements incompatibles*** : deux évènements A et B d'intersection vide, c'est à dire tels que A et B n'ont aucunes issues en commun : $A \cap B = \emptyset$.
- ❖ ***Evènement contraire de A*** : évènement dont les issues sont exactement toutes les issues non comprises dans A. Soit *A* un événement, on note $\overline{A}$ son complémentaire.

EXERCICE TYPE 1 **Comprendre le vocabulaire des probabilités**

On lance un dé cubique parfait et on note le numéro de la face supérieure.

- ❖ Il s'agit d'une ***expérience aléatoire***. Les ***éventualités*** ou ***issues*** possibles sont 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
- ❖ ***L'univers*** est $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.
- ❖ La partie $A = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$correspond à l'***événement*** « Obtenir un nombre pair ».
- ❖ $\{ 3 \}$ est un événement ***élémentaire***.
- ❖ L'***événement*** « obtenir un multiple de 3 » correspond à $B = \{ 3 ; 6\}$.
- ❖ $A \cap B = \{ 6 \}$ et $A \cup B = \{ 2 ; 3 ; 4 ; 6 \}$.
- ❖ Si C est l'événement « Obtenir 1 », alors A et C sont des ***événements incompatibles***.
- ❖ ***L'évènement contraire*** de A est : « Obtenir un nombre impair » soit $\overline{A} = \{ 1 ; 3 ; 5 \}$

  De la même manière, $\overline{B} = \{ 1 ; 2 ; 4 ; 5 \}$ et $\overline{C} = \{ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$

2. Définition d'une probabilité

<u>*Définitions*</u> Soit une expérience aléatoire, soit Ω l'univers associé.
A chaque événement élémentaire, on associe un nombre réel p_i compris entre 0 et 1, appelé ***probabilité de cet événement élémentaire***, tel que $\boxed{p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1}$.
La ***probabilité d'un événement* A**, notée **p(A)**, est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le composent.

<u>*Remarque*</u> Comme pour les fréquences en statistique, on a :
❖ La ***probabilité*** d'un événement quelconque est toujours ***<u>comprise entre 0 et 1</u>***.
❖ $\mathbf{p(\emptyset) = 0}$ et $\mathbf{p(\Omega) = 1}$.

<u>EXERCICE TYPE 2</u> **Etude d'un dé truqué**

Un dé cubique a été truqué de telle manière que :
(i) le chiffre 6 apparaisse trois fois plus souvent que le 1,
(ii) les chiffres 3 et 4 ont deux fois plus de chance d'apparaître que le 1,
(iii) et les chiffres 1, 2 et 5 ont la même probabilité d'apparaître.

Déterminer la probabilité p de l'événement élémentaire « Obtenir le nombre 1 ».

<u>*Solution*</u>

Notons p la probabilité d'obtenir le nombre 1, alors :
- d'après *(iii)*, la probabilité d'obtenir 2 et 5 est également p ;
- d'après *(ii)*, la probabilité d'obtenir 3 et 4 est $2p$;
- d'après *(i)*, la probabilité d'obtenir 6 est $3p$;

Comme la somme des probabilités doit toujours être égale à 1, on a :

$p + p + p + 2p + 2p + 3p = 1$, soit $10p = 1$, d'où : $\boxed{p = \frac{1}{10} = 0{,}1}$.

<u>*Définition*</u> Déterminer ***la loi de probabilité*** d'une expérience aléatoire, c'est déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire. On la présente souvent *sous forme d'un tableau*.

<u>EXERCICE TYPE 2</u> **(suite)**

1. Donner la loi de probabilité de l'expérience aléatoire décrite à l'exercice type 2 ci-dessus.
2. Déterminer alors la probabilité de l'événement A : « Obtenir un nombre pair ».

<u>*Solution*</u>

1. On a déterminé ci-dessus que la probabilité d'obtenir 1 est $p = \frac{1}{10}$. D'près l'énonce de l'exercice type 2, la loi de probabilité de cette expérience aléatoire est donc :

Issues possibles	1	**2**	3	**4**	5	**6**
Probabilités	$\frac{1}{10}$	$\mathbf{\frac{1}{10}}$	$\frac{2}{10}$	$\mathbf{\frac{2}{10}}$	$\frac{1}{10}$	$\mathbf{\frac{3}{10}}$

2. L'évènement « Obtenir un nombre pair » revient à : A = { 2 ; 4 ; 6 }.
On a donc : $p(A) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

La probabilité de l'événement A : « Obtenir un nombre pair » est $\mathbf{\frac{3}{5}}$.

III. Situations d'équiprobabilité

<u>*Définition*</u> Lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il s'agit d'une ***situation d'équiprobabilité*** ou encore d'un cas de ***loi équirépartie***.

<u>*Exemples de situations d'équiprobabilité*</u>

- « Tirage dans une urne de boules *indiscernables au toucher* et de *couleurs toutes différentes*… »
- « Tirage d'un numéro à la *loterie nationale*… »
- « Lancer d'un dé cubique *équilibré* et *non pipé*… »

<u>Propriété fondamentale de l'équiprobabilité</u>

Dans un cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est : $\mathbf{p(A) = \dfrac{Nombre\ d'issues\ favorables}{Nombre\ d'issues\ possibles}}$

<u>EXERCICE TYPE 3</u> **Situation d'équiprobabilité…**

On considère une roue régulière divisée en 16 secteurs superposables et numérotées de 1 à 16.
On lance la roue une fois et après l'arrêt de la roue, on lit le numéro en face de la flèche.
Calculer la probabilité de l'évènement « Obtenir au moins 8 ».

<u>*Solution*</u>

La roue est régulière et les secteurs sont superposables : il s'agit donc d'une situation d'équiprobabilité.
Notons A, l'évènement « Obtenir au moins 8 ». On a alors : A = { 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16}.
D'après la propriété fondamentale de l'équiprobabilité, on a donc :

$p(A) = \dfrac{\text{Nombre d'issues favorables}}{\text{Nombre d'issues possibles}} = \dfrac{9}{16}$. **La probabilité d'« Obtenir au moins 8 » est $\mathbf{\dfrac{9}{16}}$.**

IV. Quelques propriétés des probabilités

<u>*Remarque*</u> Si A et B sont incompatibles, alors $p(A\cup B) = p(A) + p(B)$.

<u>*Propriétés*</u> Soient A et B deux évènements d'un univers Ω, on a les deux propriétés suivantes :

$\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$ et $\boxed{p(A\cup B) + p(A\cap B) = p(A) + p(B)}$.

<u>EXERCICE TYPE 4</u> **Arbre des probabilités…**

On suppose qu'à la conception l'embryon a autant de chances d'être un garçon que d'être une fille et on s'intéresse uniquement aux familles ayant exactement trois enfants.

1. a. A l'aide d'un arbre , déterminer la probabilité des évènements A et B suivants :
A : « La 2$^{\text{ème}}$ naissance est un fille. » et B : « Il y a au moins deux garçons. »
b. Déterminer , à partir de l'arbre, $p(A\cap B)$.

2. En déduire : ***a.*** la probabilité de l'évènement $A\cup B$.
b. la probabilité de l'évènement « Le 2$^{\text{ème}}$ enfant est un garçon ».

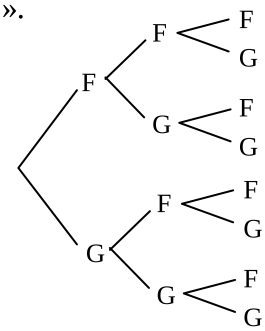
<u>*Solution*</u> ***1.*** D'après l'arbre ci-contre, on a :

$p(A) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$; $p(B) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$; $p(A\cap B) = \dfrac{1}{8}$.

2. a. $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = \dfrac{4}{8} + \dfrac{4}{8} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$

b. L'évènement « Le 2$^{\text{ème}}$ enfant est un garçon » est $\overline{A}$ d'où :

$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.



Familles obtenues
FFF
FFG
FGF
FGG
GFF
GFG
GGF
GGG

V. *Simuler une expérience aléatoire*

EXERCICE TYPE 5 **Simulation d'une situation de probabilité**

On lance de deux dés parfaitement équilibrés et on observe la somme des deux dés.

1. Vérifier que, lors d'une simulation d'un grand nombre de lancers sur tableur,
il semble que la probabilité d'obtenir la somme 9 est supérieure à celle d'obtenir la somme 10.

2. Vérifier cette conjecture en déterminant la probabilité d'obtenir la somme 9 puis celle d'obtenir 10.

Solution

1. Voir le TP « Simulation d'une situation de probabilité sur tableur ».

2. Pour déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire, on peut ici réaliser un tableau pour mieux visualiser la situation :

1er dé \ 2ème dé	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ainsi, la loi de probabilité correspondant à cette expérience est :

Somme des deux dés	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$	$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$	$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Conclusion : la probabilité d'obtenir une somme égale à 9 est supérieure à celle d'obtenir 10.

Remarque Dans le TP « Simulation d'une situation de probabilité avec un tableur », on a pu observer que :

Si on effectue suffisamment de lancers ou quand le nombre de tirages simulés est grand,
les fréquences observées tendent à s'approcher de la probabilité théorique .

Cette remarque illustre par ailleurs conjointement la fiche « Echantillonnages » : à voir.