FICHE n°12
Générer et étudier une suite numérique

Cette fiche propose de découvrir et d'étudier le comportement général des suites.
Pour l'étude plus précise des suites arithmétiques et géométriques, on consultera la fiche n°10…

I. Exemples et notations

Exemple Observons la suite des multiples de 3.

Le premier multiple (1er terme) est : $u_0 = 3\times 0 = 0$

le deuxième multiple est : $u_1 = 3\times 1 = 3$

puis… $u_2 = 3\times 2 = 6$

$u_3 = 3\times 3 = 9$ …

Le terme général d'indice **n** est : $u_n = 3\times n = 3n$

On note la suite de tous ces multiples $(u_n)_{n\geq 0}$

Remarque Dans l'exemple ci-dessus, on a : $\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = 3\times(n+1) = 3n + 3 \\ u_n + 1 = 3n + 1 \end{array}\right\}$

Attention aux notations avec les indices.

$u_{n+1} \neq u_n + 1$

II. Deux manières pour définir une suite

1. Avec son terme général (en fonction de n)

Exemple On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier naturel n ≥ 0 par $v_n = 5^n - n$

Le premier terme est : $v_0 = 5^0 - 0 = 1$

Les termes suivants sont : $v_1 = 5^1 - 1 = 4$

$v_2 = 5^2 - 2 = 23$

$v_3 = 5^3 - 3 = 122$ …

Dans cette exemple, la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est définie **en fonction de *n***.

On peut par exemple écrire : $v_n = f(n)$ où f est une fonction définie par $f(x) = 5^x - x$

2. Avec une relation de récurrence (en fonction de termes précédents)

On peut aussi définir une suite en calculant un terme à partir de termes précédents. IL faut dans ce cas, connaître le (ou les) premier(s) terme(s) pour pouvoir calculer les termes suivants les uns après les autres…

Exemple On place 500 € sur un compte rémunéré à 3% en intérêts composés annuels. Chaque année, le client ajoute en plus 50 €.

On note w_n la somme présente sur le compte au bout de n années, avec $w_0 = 500$ €.

On a alors : $w_1 = (1 + \frac{3}{100}) \times w_0 + 50 = 1{,}03\, w_0 + 50 = 1{,}03 \times 500 + 50 = 565$ €.

$w_2 = 1{,}03\, w_1 + 50 = 1{,}03 \times 565 + 50 = 631{,}95$ € ...

La suite est en fait définie par la **relation de récurrence** : $\boxed{w_{n+1} = 1{,}03\, w_n + 50}$.

III. Représentation graphique de suites

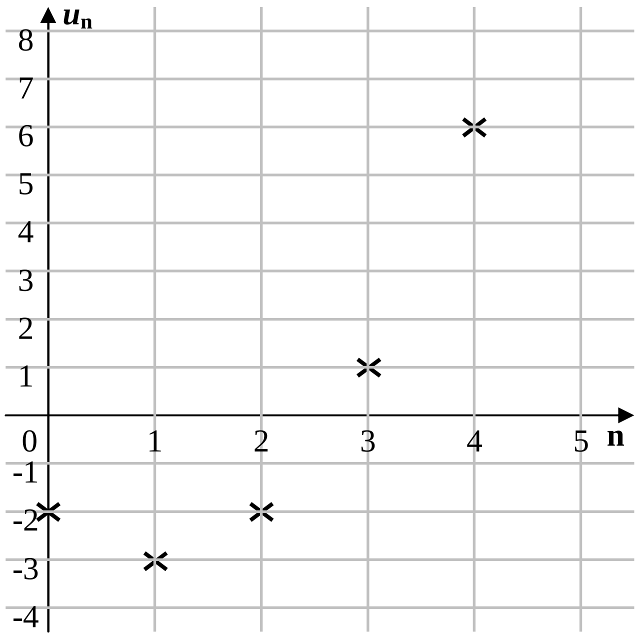
Exemple 1 ***Suite définie par son terme général***

On considère la suite $(\boldsymbol{u}_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n}\geq 0}$ définie pour tout entier naturel $\mathbf{n \geq 0}$ par $\boldsymbol{u}_{\mathbf{n}} = \mathbf{n}^2 - 2\text{n} - 2$.

On peut représenter graphiquement cette suite par les points de coordonnées $(\mathbf{n}\ ;\ \boldsymbol{u}_{\mathbf{n}})$.

Tableau de valeurs :

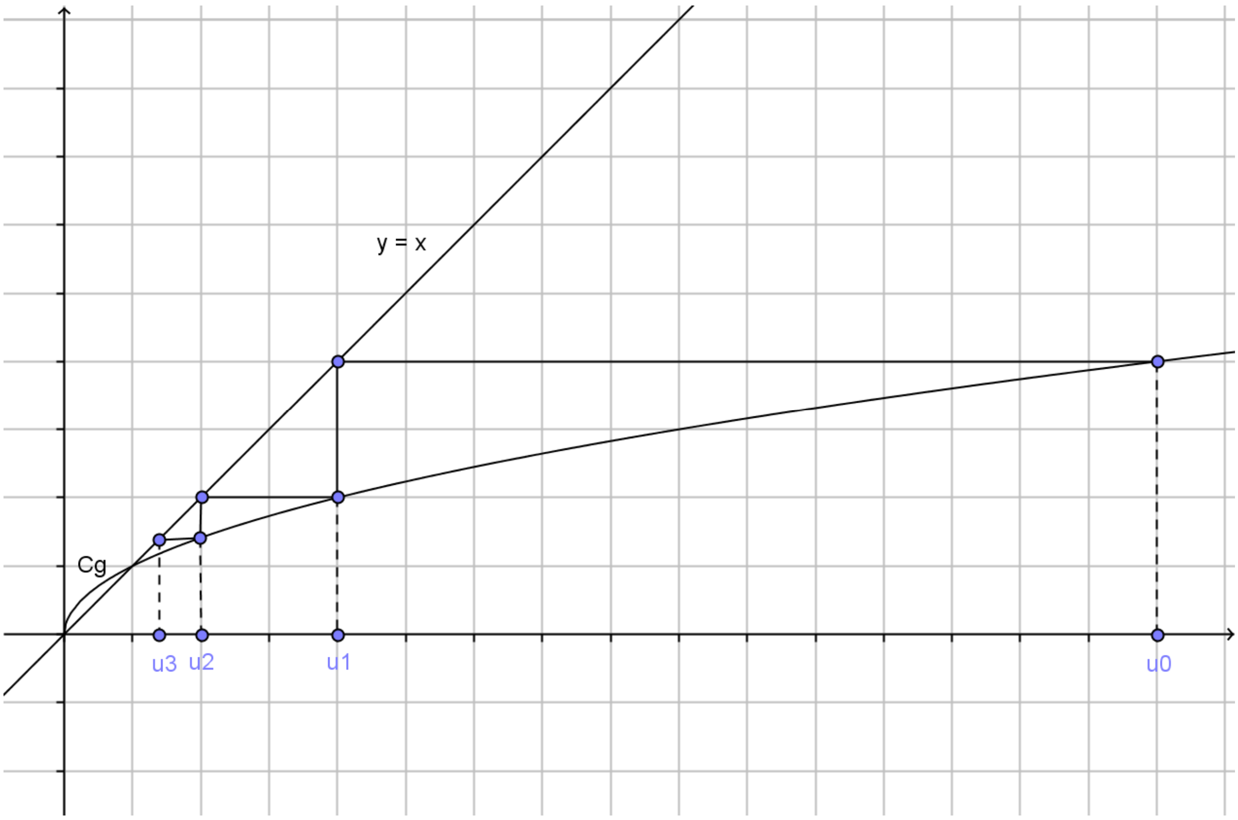
n	0	1	2	3	4
$\boldsymbol{u}_{\mathbf{n}}$	–2	–3	–2	1	6



Exemple 2 ***Suite définie par récurrence : représentation sur l'axe des abscisses***

On considère la suite $(\boldsymbol{v}_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n}\geq 0}$ définie pour tout entier naturel $\mathbf{n \geq 0}$ par $\boldsymbol{v}_{\mathbf{n+1}} = \sqrt{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}}}$ avec $\boldsymbol{v}_{\mathbf{0}} = 16$.

On peut représenter graphiquement cette suite sur l'axe des abscisses par les points de coordonnées $(\boldsymbol{u}_{\mathbf{n}}\ ;\ 0)$ grâce à la droite d'équation $\boldsymbol{y = x}$.



IV. Sens de variation d'une suite

Définitions

- Une suite (u_n) est ***strictement croissante*** si pour tout entier naturel **n** on a : $u_{n+1} > u_n$
- Une suite (u_n) est ***strictement décroissante*** si pour tout entier naturel **n** on a : $u_{n+1} < u_n$
- Une suite (u_n) est ***constante*** si pour tout entier naturel **n** on a : $u_{n+1} = u_n$

Méthodes ***Comment déterminer le sens de variation d'une suite ?***

☞ On peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

En effet : $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow (u_n)$ est strictement croissante

$u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow (u_n)$ est strictement décroissante

☞ On peut comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 (si u_n est toujours strictement positif…)

En effet : Si $u_n > 0$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow (u_n)$ est strictement croissante

Si $u_n > 0$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow (u_n)$ est strictement décroissante

☞ On peut utiliser les variations d'une fonction f si le terme général u_n est tel que $u_n = f(\mathbf{n})$.

En effet : si une fonction f est strictement croissante, alors pour tout réel $x < y$, alors $f(x) < f(y)$.
Comme $\mathbf{n} < \mathbf{n}+1$, on a $f(\mathbf{n}) < f(\mathbf{n+1})$, soit $u_n < u_{n+1}$,
c'est-à-dire que la suite (u_n) est strictement croissante.
Et de même si f est strictement décroissante…

EXERCICE TYPE ***Déterminer le sens de variation d'une suite.***

Etudier le sens de variations des suites suivantes :

1. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier naturel $\mathbf{n \geq 0}$ par $u_n = \mathbf{n}^2 + 6\mathbf{n} + 10$

2. $(v_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier naturel $\mathbf{n \geq 0}$ par $v_n = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathbf{n}}$

3. $(w_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence pour tout entier naturel $\mathbf{n \geq 0}$ selon $w_{n+1} = w_n + n^2$

4. $(t_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier naturel $\mathbf{n \geq 0}$ par $t_n = \frac{1}{\mathbf{n}}$

Solutions ***1.*** On peut écrire $u_n = f(\mathbf{n})$ avec $f : x \longmapsto f(x) = x^2 + 6x + 10$

f est une fonction trinôme du type $ax^2 + bx + c$ avec $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\times 1} = -3$.

D'après la leçon, on sait que la fonction f est strictement croissante sur $[-3 ; +\infty[$.

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donc strictement croissante.

2. Comme v_n est sous forme de produit, il convient souvent d'utiliser la méthode par le quotient...

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}} = \frac{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\times\frac{1}{2}}{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}} = \frac{1}{2} < 1,$$ donc la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante.

3. $w_{n+1} = w_n + n^2 \quad \Leftrightarrow \quad w_{n+1} - w_n = n^2 > 0$.
La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est donc strictement croissante.

4. Dans cet exemple, les trois méthodes peuvent être utilisées…

☞ $t_{n+1} - t_n = \dfrac{1}{\mathbf{n+1}} - \dfrac{1}{\mathbf{n}} = \dfrac{\mathbf{n}}{\mathbf{n(n+1)}} - \dfrac{\mathbf{n+1}}{\mathbf{n(n+1)}} = \dfrac{\mathbf{n - n - 1}}{\mathbf{n(n+1)}} = \dfrac{\mathbf{-1}}{\mathbf{n(n+1)}} < 0$

☞ $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \dfrac{1}{\mathbf{n+1}} \times \dfrac{\mathbf{n}}{1} = \dfrac{\mathbf{n}}{\mathbf{n+1}} < 1$

☞ $t_n = f(\mathbf{n})$ avec $f : x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$ décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Avec les trois méthodes, on obtient bien sûr la même conclusion :

la suite suite $(t_n)_{n\geq 0}$ est donc strictement décroissante.

V. Deux sommes à connaître

Propriétés

- Pour tout entier naturel n, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Pour tout entier naturel n, si $q \neq 1$, alors on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Preuves

- $$\begin{array}{l} \quad 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n \\ \underline{+ \; n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1} \\ = (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \ldots + (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) = n(n + 1) \end{array}$$

  d'où $\quad 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

- $$\begin{aligned} (1-q)(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ q^n) &= (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ q^n) - q(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ q^n) \\ &= 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ q^n - q - q^2 - q^3 - \ldots - q^n - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

  D'où, si $q \neq 1$, alors $\quad 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$