FICHE n°11
Etude des variations d'une fonction

I. Sens de variations d'une fonction (rappel de 2^{nde}) : définitions

Définition

Une fonction f est ***croissante*** sur un intervalle I, lorsque :
si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$. *(même ordre)*

Une fonction f est ***décroissante*** sur un intervalle I, lorsque :
si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$. *(ordre inversé)*

Une fonction ayant un seule sens de variations sur un intervalle I est dite ***monotone***.

Remarque On peut étudier les variations d'une fonction en étudiant le signe de $f(a) - f(b)$.

En effet, si $a < b$, montrer par exemple que $f(a) < f(b)$ revient à montrer que $f(a) - f(b) < 0$…

EXERCICE TYPE 1 **Variations et signe de $f(a) - f(b)$.**

Démontrer le sens de variations des fonctions « carré » et « inverse » vues en 2^{nde}.

Solution

- Fonction « carré » :

  Soit a et b deux nombres réels, alors : $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

  ¤ si $0 \leq a < b$, alors $a - b < 0$ et $a + b > 0$, donc $f(a) - f(b) < 0$. *(même ordre)*

  La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

  ¤ si $a < b \leq 0$, alors $a - b < 0$ et $a + b < 0$, donc $f(a) - f(b) > 0$. *(ordre inversé)*

  La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

- Fonction « inverse » :

  Soit a et b deux nombres réels, alors : $f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b - a}{ab}$.

  ¤ si $0 < a < b$, alors $b - a > 0$ et $ab > 0$ (de même signe), donc $f(a) - f(b) > 0$. *(ordre inversé)*

  La fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

  ¤ si $a < b < 0$, alors $b - a > 0$ et $ab > 0$ (de même signe), donc $f(a) - f(b) > 0$. *(ordre inversé)*

  La fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est aussi strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

II. *Etudier les variations d'une fonction grâce aux fonctions usuelles*

Dans ce paragraphe, on étudiant les variations d'une fonction en décomposant celle-ci avec les fonctions de référence étudiées dans la fiche « *Etude des variations de quelques fonctions de référence* ».

1. *Fonctions* $x \longmapsto u(x) + \beta$ *et* $x \longmapsto u(x-\alpha)$ *avec* α , β *deux nombres réels*

Soit une fonction u définie sur un intervalle I et C sa courbe représentative.

Rappel (2nde) ¤ La courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto u(x) + \beta$ est l'image de la courbe C par une translation de vecteur $\beta\vec{j}$.

¤ La courbe représentative de la fonction $g : x \longmapsto u(x-\alpha)$ est l'image de la courbe C par une translation de vecteur $\alpha\vec{i}$.

Théorème Les fonctions u et $f : x \longmapsto u(x) + \beta$ ont les mêmes sens de variation sur l'intervalle I.

Preuve Soit a et b deux nombres réels de l'intervalle I tel que $a < b$.

Raisonnons par disjonction des cas :

¤ si u est croissante sur I, alors $u(a) < u(b)$ (même ordre)
Donc : $u(a) + \beta < u(b) + \beta$, c'est-à-dire $f(a) < f(b)$.
Autrement dit, la fonction f est aussi croissante sur I.

¤ Dela même manière, si u est décroissante sur I, alors $u(a) > u(b)$ (ordre inversé)
Donc : $u(a) + \beta > u(b) + \beta$, c'est-à-dire $f(a) > f(b)$.
Autrement dit, la fonction f est aussi décroissante sur I.

EXERCICE TYPE 2 **Représentation graphique de fonctions associées .**

Représenter, sur leur domaine de définition respectif, les fonctions suivantes :

$$u : x \longmapsto \sqrt{x} \quad \text{et} \quad f : x \longmapsto \sqrt{x+3} - 2 \ .$$

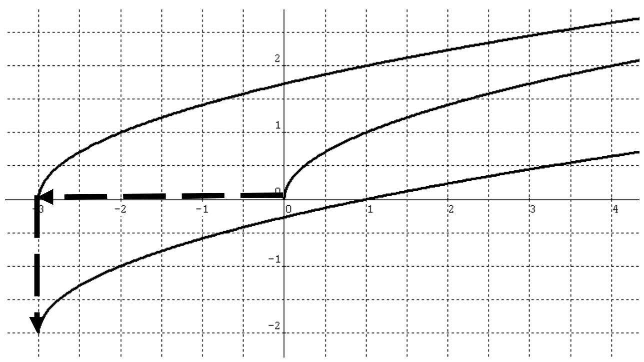
Solution

¤ On étudie d'abord les domaines de définition : $D_u = [0 \,;\, +\infty[$ et $D_f = [-3 \,;\, +\infty[$.

¤ On décompose la fonction en une suite de fonctions de référence :

$$f : x \longmapsto x + 3 \longmapsto \sqrt{x+3} \longmapsto \sqrt{x+3} - 2 \ ..$$

En remarquant que $x + 3 = x - (-3)$, on en déduit que la courbe représentative de f est l'image de celle de u par la translation de vecteur $-3\vec{i}$ suivi d'une translation de vecteur $-2\vec{j}$.



2. *Autres fonctions associées*

Soit une fonction $\boldsymbol{u}$ monotone sur un intervalle I et $\boldsymbol{C}$ sa courbe représentative.

Théorèmes

¤ Si λ est un nombre réel non nul, alors on note $\lambda \boldsymbol{u}$ la fonction : $\lambda \boldsymbol{u} : \boldsymbol{x} \longmapsto \lambda \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$

☞ Si $\lambda > 0$, alors la fonction $\lambda \boldsymbol{u}$ a le <u>même</u> sens de variation que la fonction $\boldsymbol{u}$.
☞ Si $\lambda < 0$, alors la fonction $\lambda \boldsymbol{u}$ a un sens de variation <u>contraire</u> à celle de la fonction $\boldsymbol{u}$.

¤ Si, pour tout réel $\boldsymbol{x}$ de I, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \geq 0$, alors on note $\sqrt{\boldsymbol{u}}$ la fonction : $\sqrt{\boldsymbol{u}} : \boldsymbol{x} \longmapsto \sqrt{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}$

☞ la fonction $\sqrt{\boldsymbol{u}}$ a le <u>même</u> sens de variation que la fonction $\boldsymbol{u}$.

¤ Si, pour tout réel $\boldsymbol{x}$ de I, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \neq 0$, alors on note $\frac{1}{\boldsymbol{u}}$ la fonction : $\frac{1}{\boldsymbol{u}} : \boldsymbol{x} \longmapsto \frac{1}{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}$

☞ la fonction $\frac{1}{\boldsymbol{u}}$ a un sens de variation <u>contraire</u> à celle de la fonction $\boldsymbol{u}$.

Preuve On ne présente ici que le cas $\sqrt{\boldsymbol{u}}$, le principe de démonstration étant le même pour les autres cas…

Soit $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux nombres réels de l'intervalle I tel que $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$.

Raisonnons par disjonction des cas :

¤ si $\boldsymbol{u}$ est croissante sur I, alors $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a}) < \boldsymbol{u}(\boldsymbol{b})$ (même ordre)
La fonction racine carrée est croissante sur [0 ; +∞[, donc : $\sqrt{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a})} < \sqrt{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{b})}$ (même ordre)
Bilan : $\sqrt{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a})}$ et $\sqrt{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{b})}$ sont rangés dans le même ordre que $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$,
c'est-à-dire que la fonction $\sqrt{\boldsymbol{u}}$ est ici croissante, comme la fonction $\boldsymbol{u}$.

¤ si $\boldsymbol{u}$ est décroissante sur I, alors $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a}) > \boldsymbol{u}(\boldsymbol{b})$ (ordre contraire)
La fonction racine carrée est croissante sur [0 ; +∞[, donc : $\sqrt{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a})} > \sqrt{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{b})}$ (même ordre)
Bilan : $\sqrt{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a})}$ et $\sqrt{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{b})}$ sont rangés dans un ordre contraire que $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$,
c'est-à-dire que la fonction $\sqrt{\boldsymbol{u}}$ est ici décroissante, comme la fonction $\boldsymbol{u}$.

EXERCICE TYPE 3 **Etude des variations de fonctions associées.**

Sur [1 ; 9], étudier le sens de variations de la fonction $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{x} \longmapsto -\frac{2}{\sqrt{\boldsymbol{x}}}$ et montrer que $-2 \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq -\frac{2}{3}$.

Solution

¤ Pour l'étude de variation, on décompose la fonction en une suite de fonctions de référence :

$$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{x} \longmapsto \sqrt{\boldsymbol{x}} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{x}}} \longmapsto -\frac{2}{\sqrt{\boldsymbol{x}}} .$$

☞ La fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto \sqrt{\boldsymbol{x}}$ est croissante sur [1 ; 9].

☞ La fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{x}}}$ est décroissante sur [1 ; 9]. ($\boldsymbol{u}$ et $\frac{1}{\boldsymbol{u}}$ de variation contraire)

☞ La fonction $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{x} \longmapsto -\frac{2}{\sqrt{\boldsymbol{x}}}$ est donc croissante sur [1 ; 9]. ($-2 < 0$: $\boldsymbol{u}$ et $-2\boldsymbol{u}$ de variation contraire)

¤ Sur [1 ; 9], on a : $1 \leq \boldsymbol{x} \leq 9$

donc : $\boldsymbol{f}(1) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(9)$ car $\boldsymbol{f}$ est croissante sur [1 ; 9] (même ordre)

d'où : $-2 \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq -\frac{2}{3}$ car $\boldsymbol{f}(1) = -2$ et $\boldsymbol{f}(9) = -\frac{2}{3}$.