FICHE n°8
Etude de quelques fonctions de référence

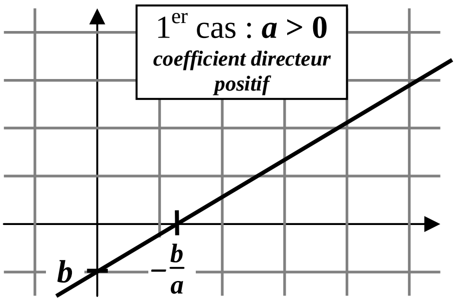
I. Fonctions affines : rappel des propriétés vues en 2nde…

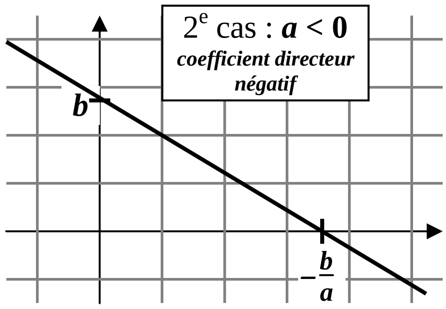
<u>Définition</u> *(aspect littéral)*

Une ***fonction affine*** est une fonction de la forme $x \longmapsto ax + b$ (avec a et b donnés).

<u>*Aspect graphique (rappel)*</u> La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

<u>*Preuve*</u> Cette propriété a été démontrée en 2nde… On trouvera une nouvelle preuve dans la fiche 17…





<u>*Vocabulaire*</u> Soit $f : x \longmapsto ax + b$ (avec a et b deux réels donnés).

- a est appelé le ***coefficient directeur*** ou ***pente***
- Comme $f(0) = b$, b est appelé l'***ordonnée à l'origine***

<u>*Cas particuliers*</u>
- ¤ Si $b = 0$ (fonction ***linéaire***), alors la droite passe par l'origine (*proportionnalité*…).
- ¤ Si $a = 0$ (fonction ***constante***), alors la droite est parallèle à l'axe des abscisses.

<u>*Tableau de signes d'une fonction affine*</u>

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	**Signe de –a**	0	**Signe de a**

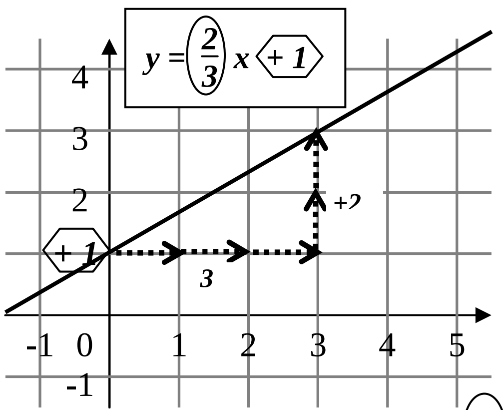
Voir la démonstration algébrique dans la fiche « *Etudier le signe d'une fonction* ».

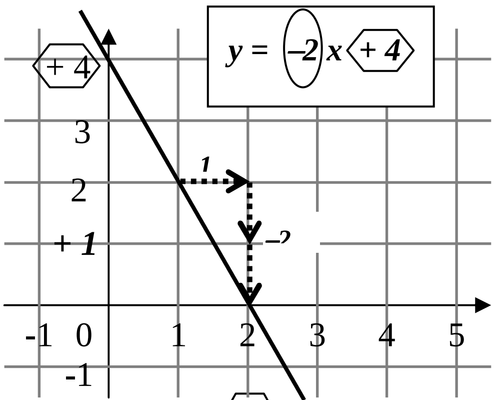
<u>*Variations d'une fonction affine*</u>

si le coefficient directeur est positif alors la fonction affine est strictement croissante

si le coefficient directeur est négatif alors la fonction affine est strictement décroissante

<u>*EXERCICE TYPE 1*</u> **Déterminer graphiquement l'expression d'une fonction affine**





Légendes utilisées sur ces graphiques : ◯ *est le* ***coefficient directeur*** ⬡ *est* ***l'ordonnée à l'origine***

II. Fonction « Valeur absolue »

Définition La fonction « valeur absolue » est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x \ , si\ x \geq 0 \\ -x \ , si\ x < 0 \end{cases}$$

Exemples $|+5| = 5$; $|-3| = 3$; $|-\pi| = \pi$; $|+1{,}53| = 1{,}53$ et $|3 - \pi| = \pi - 3$ car $3 - \pi < 0$

Remarque La valeur absolue d'un nombre est en fait l'expression mathématique de ce que l'on appelait « distance à zéro » à partir de la classe de 5ème…

Etude de signe La valeur absolue d'un nombre est toujours positive.

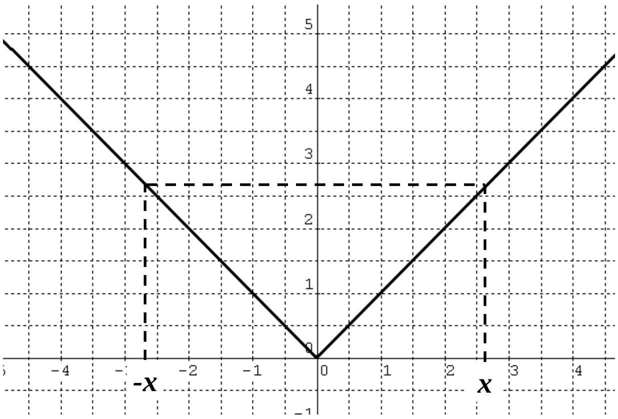
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x \rvert$		+	0	+	

Etude des variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x \rvert$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Preuve Conséquence des variations des fonctions $x \longmapsto x$ sur $[0 ; +\infty[$ et $x \longmapsto -x$ sur $]-\infty ; 0]$…

Représentation graphique



Remarque graphique La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

C'est en fait la traduction graphique de la propriété : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |-x| = |x|$

EXERCICE TYPE 2 **Expliciter l'expression d'une fonction utilisant une valeur absolue**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |-2x + 6|$

1. Ecrire, selon les valeurs de x, la fonction $f(x)$ sans valeur absolue.

2. Représenter graphiquement cette fonction dans un repère orthonormé adapté.

Solution

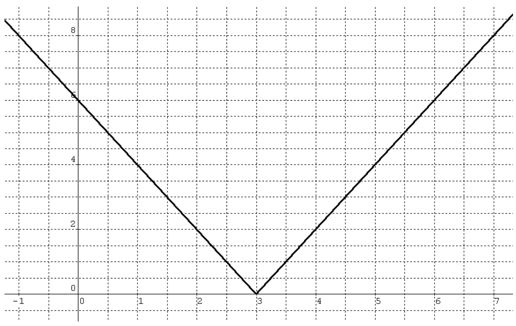
1. Effectuons une étude par ***disjonction des cas***, la valeur de $f(x)$ dépendant du signe de $(-2x + 6)$:

¤ $f(x) = -2x + 6$ si $-2x + 6$ est positif, c'est-à-dire si $-2x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 3$

¤ $f(x) = -(-2x + 6) = 2x - 6$ si $-2x + 6$ est négatif, c'est-à-dire si $-2x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

Autrement dit : $f(x) = \begin{cases} -2x + 6 & si\ x \leq 3 \\ 2x - 6 & si\ x \geq 3 \end{cases}$

2. La représentation graphique de cette fonction est celle d'une ***fonction affine par morceaux***, c'est-à-dire qu'elle est composée deux demi-droites.



III. Fonction « Inverse » (rappel de 2^{nde})

Définition La fonction « inverse » est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}/\{0\}$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \dfrac{1}{x}$

Etude de signe 0 est une ***valeur interdite*** (calcul de l'inverse de 0 impossible).
L'inverse d'un nombre a le même signe que ce nombre.

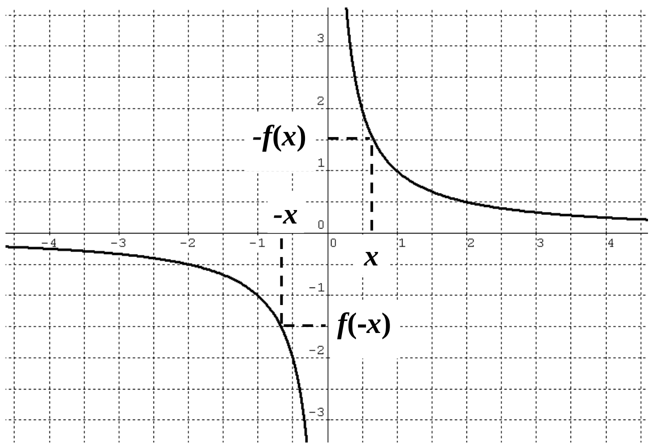
x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$-$	$\Vert$	$+$

Etude des variations

x	$-\infty$		**0**		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	0	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	0

Preuve (vue en 2^{nde}) Voir la fiche « Etude des variations d'une fonction ».

Représentation graphique



Remarques graphiques Ce type de courbe s'appelle une ***hyperbole***.
Elle est symétrique par rapport à l'origine. Si on note f la fonction inverse,
c'est en fait la traduction graphique de la propriété : $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f(-x) = -f(x)$

IV. Fonctions « carré » et « racine carrée »

Définitions La fonction « carré » est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f(x) = x^2$
La fonction « racine carrée » est la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\ g(x) = \sqrt{x}$

Remarques
- ¤ Par définition de la racine carrée, on sait que : $\boxed{\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\quad (\sqrt{x}\,)^2 = x}$
- ¤ Si x est positif, on a : $\sqrt{x^2} = x$
  Si x est négatif, alors $(-x)$ est positif et on a donc : $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x$.
  Autrement dit : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \sqrt{x^2} = |\,x\,|}$

Etude de signe

x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
x^2	$+$	0	$+$

x	**0**		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+$	

Etude des variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$

Preuve ¤ Pour la fonction carré (vue en 2nde) : voir la fiche « Etude des variations d'une fonction ».

¤ Pour la fonction racine carrée $\boldsymbol{g}$:

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ *est l' « **expression conjuguée** » de* $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

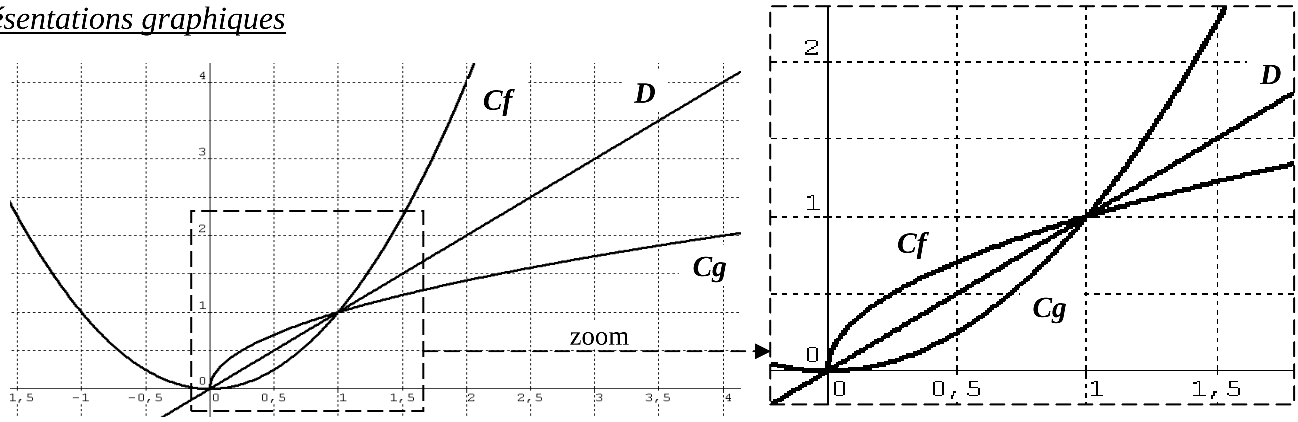
Soit $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux nombres appartenant à l'intervelle[0 ; $+\infty$ [,

alors : $\quad g(a)-g(b)=\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\times(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{a-b}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$.

Autrement dit, si $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$, alors $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}<\boldsymbol{0}$ et, comme $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq 0$, on a donc : $g(a)-g(b)<0$.

Conclusion : la fonction $\boldsymbol{g} : x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur [0 ; $+\infty$ [.

Représentations graphiques



Remarques graphiques On note ***D***, ***Cf*** et ***Cg*** les courbes représentatives de $x\longmapsto x$, $x\longmapsto x^2$ et $x\longmapsto\sqrt{x}$.

¤ La courbe ***Cf*** représentative de la fonction carrée est une ***parabole***.

¤ Sur [0 ; $+\infty$[, les courbes ***Cf*** et ***Cg*** sont symétriques par rapport à la droite ***D***.
C'est en fait la traduction graphique de la propriété : $\forall\, x\geq 0,\quad y=\sqrt{x}\iff x=y^2$

¤ **Positions relatives des courbes *D*, *Cf* et *Cg* sur [0 ; $+\infty$[.**

- Si $\mathbf{0\leq x\leq 1}$, alors la courbe ***Cf*** est « en dessous » de ***D*** qui est elle-même « en dessous » de ***Cg***.
- Si $\mathbf{x\geq 1}$, alors la courbe ***Cg*** est « en dessous » de ***D*** qui est elle-même « en dessous » de ***Cf***.

Autrement dit : • Si $\mathbf{0\leq x\leq 1}$, alors $\mathbf{x^2\leq x\leq\sqrt{x}}$. • Si $\mathbf{x\geq 1}$, alors $\mathbf{\sqrt{x}\leq x\leq x^2}$.

Preuve

Cf* « en dessous » de *Cg* sur un intervalle *I
$\iff \forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x)\leq g(x) \iff \forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x)-g(x)\leq 0$
Etudier la position relative de deux courbes ***Cf*** et ***Cg*** revient à **étudier le signe de la différence** $f(x)-g(x)$

¤ Positions relatives des courbes D et Cf sur [0 ; $+\infty$[.
$f(x)-x=x^2-x=x(x-1)$
D'après le tableau de signes ci-contre :
- Si $0\leq x\leq 1$, alors $f(x)-x\leq 0$, c'est-à-dire $x^2\leq x$.
- Si $x\geq 1$, alors $f(x)-x\geq 0$, c'est-à-dire $x^2\geq x$.

x	0		1	$+\infty$
x	0	+		+
$x-1$		–	0	+
$x(x-1)$	0	–	0	+

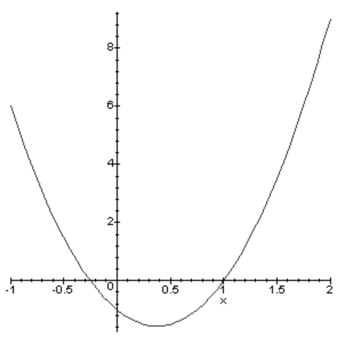
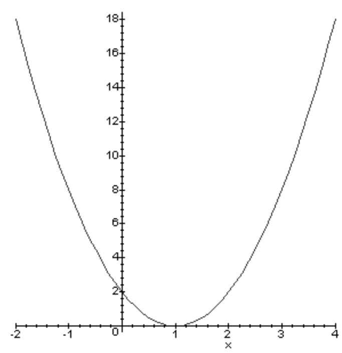
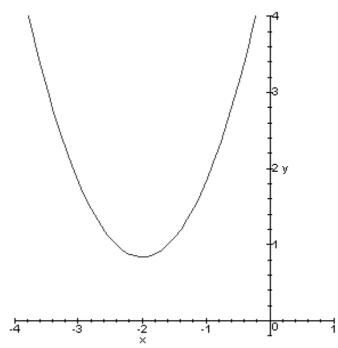
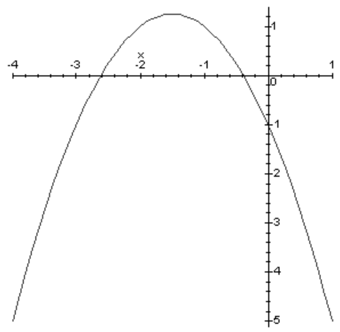
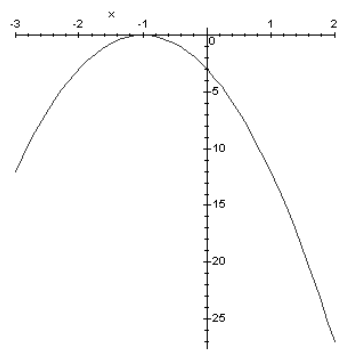
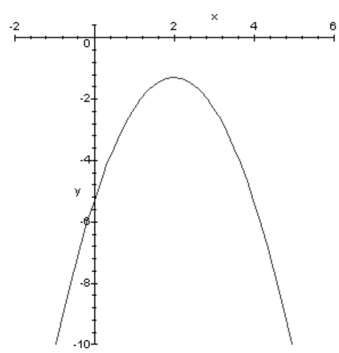
¤ Positions relatives des courbes D et Cg sur [0 ; $+\infty$[.
$$x-g(x)=x-\sqrt{x}=\frac{(x-\sqrt{x})\times(x+\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})}=\frac{x^2-x}{x+\sqrt{x}}=\frac{x(x-1)}{x+\sqrt{x}}.$$
$\forall\, x\in[0\,;+\infty[,\quad x-\sqrt{x}\geq 0$ donc l'expression $x-g(x)$ a le même signe que $x(x-1)$ étudié ci-dessus.

D'après le tableau de signes :
- Si $0\leq x\leq 1$, alors $x-g(x)\leq 0$, c'est-à-dire $x\leq\sqrt{x}$.
- Si $x\geq 1$, alors $x-g(x)\geq 0$, c'est-à-dire $x\geq\sqrt{x}$.

V. *Les fonctions du type* $x \longmapsto ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

Soit la fonction P : $x \longmapsto \mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$.

Notons son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Signe de Δ	**Δ > 0**	**Δ = 0**	**Δ < 0**
Solutions de l'équation P(x) = 0	Deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	Une unique solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	Aucune solution dans **R**
Factorisation de P(x)	$\mathrm{P}(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$\mathrm{P}(x) = a(x - x_0)^2$	Pas de factorisation possible…
Signe de P(x) suivant les valeurs de x	x_1 x_2 ————————————> *signe de* ***a*** | 0 | *signe de* ***−a*** | 0 | *signe de* ***a***	x_0 ————————————> *signe de a* | 0 | *signe de a*	————————————> *signe de a*
Courbe dans le cas $a > 0$ « tournée vers le haut »			
Courbe dans le cas $a < 0$ « tournée vers le bas »			
Minimum et **maximum**	Dans chaque cas, la fonction atteint soit un minimum, soit un maximum en $\boldsymbol{x_0 = -\dfrac{b}{2a}}$		