FICHE n°7
Etudier le signe d'une fonction

I. Etudier le signe d'une expression du type « ax + b »

<u>*Propriété*</u>

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	**Signe de $-a$**	0	**Signe de a**

<u>*preuve*</u> Raisonnons par disjonction des cas :

¤ si $\boldsymbol{a}$ est *positif :* $\boldsymbol{ax+b}$ est du signe de $\boldsymbol{a}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{ax+b} > 0$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{ax} > \boldsymbol{-b}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x} > -\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$

¤ si $\boldsymbol{a}$ est *négatif :* $\boldsymbol{ax+b}$ est du signe de $\boldsymbol{a}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{ax+b} < 0$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{ax} < \boldsymbol{-b}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x} > -\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$

II. Signe d'une expression produit ou quotient

<u>*Méthode*</u> Pour déterminer le tableau de signe d'une expression produit ou d'une expression quotient, on réalise un tableau de signe en appliquant la règle des signes…

<u>***EXERCICE TYPE 1***</u> Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{-5}{3x-2} - 2}$.

<u>*Solution*</u>

¤ La question revient à déterminer le signe de $\dfrac{-5}{3x-2} - 2$ qui doit être positif.

¤ On **transforme** l'expression pour la transformer en quotients et/ou produits :

$$\frac{-5}{3x-2} - 2 = \frac{-5}{3x-2} - \frac{2(3x-2)}{3x-2} = \frac{-5-6x+4}{3x-2} = \boxed{\frac{-6x-1}{3x-2}}$$

¤ On **étudie le signe** de l'expression $\dfrac{-6x-1}{3x-2}$:

✓ *Valeurs remarquables :* $3x-2=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ (valeur interdite) ; $-6x-1=0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{6}$

✓ *Tableau de signe* :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{6}$		$\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
$-6x-1$		+	0	–	|	–	
$3x-2$		–	|	–	0	+	
$\dfrac{-6x-1}{3x-2}$		–	0	+	||	–	

¤ Conclusion : La fonction f est définie sur $[\, -\dfrac{1}{6} ; \dfrac{2}{3} \,[$.

III. *Signe d'une fonction trinôme*

<u>*Etude*</u> On rappelle que $P(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$ (voir fiche « Expressions algébriques »)

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'expression entre crochets sera toujours positive donc le trinôme sera toujours du même signe que a, quelque soit les valeurs de x.
- Si $\Delta = 0$, alors l'expression entre crochets sera toujours positive donc le trinôme est du même signe que a, quelque soit les valeurs de x.
- Si $\Delta > 0$, on sait que $P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

  où : x_1 et x_2 sont les racines du trinôme : $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ (voir fiche « Equations »)

  Si, par exemple, $x_1 < x_2$, $P(x)$ a alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$x - x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$(x - x_1)(x - x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	***Signe de a***	0	***Signe opposé de a***	0	***Signe de a***

<u>*Définition et théorème*</u>

On considère une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

On note Δ et on appelle ***discriminant*** le nombre : $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.

- Si Δ **< 0**, $P(x)$ est toujours ***du signe de a***.
- Si Δ **= 0**, $P(x)$ est toujours ***du signe de a*** (excepté pour $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ où $P(x_0) = 0$)
- Si Δ **> 0**,
  - $P(x)$ est ***du signe de a à l'extérieur de x_1 et x_2***
  - $P(x)$ est ***du signe opposé de a entre x_1 et x_2***

  avec $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

EXERCICE TYPE 2 Résoudre l'inéquation $6x^2 + x - 1 < 0$

<u>*Solution*</u> *voir Ex type 3 fiche « Equations » pour le discriminant et les racines…*

Pour ce trinôme : $\Delta = 25$; les racines de $6x^2 + x - 1 = 0$ sont : $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1}{3}$

Comme $\Delta > 0$ et comme $a = 6 > 0$, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$6x^2 + x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Conclusion : $\boxed{\mathbf{S = \left]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{3}\right[}}$.