

## Etudier le signe d'une fonction

### I. Etudier le signe d'une expression du type « $ax + b$ »

Propriété

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe de $-a$	0	Signe de $a$

preuve    Raisonnons par disjonction des cas :

- ☒ si  $a$  est positif :  $ax + b$  est du signe de  $a \Leftrightarrow ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$
- ☒ si  $a$  est négatif :  $ax + b$  est du signe de  $a \Leftrightarrow ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$

### II. Signe d'une expression produit ou quotient

Méthode

Pour déterminer le tableau de signe d'une expression produit ou d'une expression quotient, on réalise un tableau de signe en appliquant la règle des signes...

#### **EXERCICE TYPE 1**

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{\frac{-5}{3x-2} - 2}$ .

Solution

- ☒ La question revient à déterminer le signe de  $\frac{-5}{3x-2} - 2$  qui doit être positif.
- ☒ On **transforme** l'expression pour la transformer en quotients et/ou produits :

$$\frac{-5}{3x-2} - 2 = \frac{-5}{3x-2} - \frac{2(3x-2)}{3x-2} = \frac{-5 - 6x + 4}{3x-2} = \frac{-6x-1}{3x-2}$$

- ☒ On **étudie le signe** de l'expression  $\frac{-6x-1}{3x-2}$  :

✓ Valeurs remarquables :  $3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$  (valeur interdite) ;  $-6x-1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{6}$

✓ Tableau de signe :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$-6x-1$	+	0	-	-
$3x-2$	-	-	0	+
$\frac{-6x-1}{3x-2}$	-	0	+	-

- ☒ Conclusion : La fonction  $f$  est définie sur  $[-\frac{1}{6}; \frac{2}{3}[$ .

### III. Signe d'une fonction trinôme

Etude On rappelle que  $P(x) = ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$  (voir fiche « Expressions algébriques »)

Notons  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Si  $\Delta < 0$ , alors l'expression entre crochets sera toujours positive donc le trinôme sera toujours du même signe que  $a$ , quelque soit les valeurs de  $x$ .
- Si  $\Delta = 0$ , alors l'expression entre crochets sera toujours positive donc le trinôme est du même signe que  $a$ , quelque soit les valeurs de  $x$ .
- Si  $\Delta > 0$ , on sait que  $P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$   
où :  $x_1$  et  $x_2$  sont les racines du trinôme :  $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  (voir fiche « Equations »)

Si, par exemple,  $x_1 < x_2$ ,  $P(x)$  a alors le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$x - x_1$	-	0	+	+
$x - x_2$	-	-	0	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	-	+
$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	<b>Signe de <math>a</math></b>	0	<b>Signe opposé de <math>a</math></b>	<b>Signe de <math>a</math></b>

#### Définition et théorème

On considère une équation du type  $ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a \neq 0$ .

On note  $\Delta$  et on appelle **discriminant** le nombre :  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Si  $\Delta < 0$ ,  $P(x)$  est toujours **du signe de  $a$** .
  - Si  $\Delta = 0$ ,  $P(x)$  est toujours **du signe de  $a$**  (excepté pour  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  où  $P(x_0) = 0$ )
  - Si  $\Delta > 0$ ,
    - $P(x)$  est **du signe de  $a$  à l'extérieur de  $x_1$  et  $x_2$**
    - $P(x)$  est **du signe opposé de  $a$  entre  $x_1$  et  $x_2$**
- avec  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

#### **EXERCICE TYPE 2** Résoudre l'inéquation $6x^2 + x - 1 < 0$

Solution voir Ex type 3 fiche « Equations » pour le discriminant et les racines...

Pour ce trinôme :  $\Delta = 25$  ; les racines de  $6x^2 + x - 1 = 0$  sont :  $x_1 = -\frac{1}{2}$  et  $x_2 = \frac{1}{3}$

Comme  $\Delta > 0$  et comme  $a = 6 > 0$ , on a le tableau de signes suivant :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$6x^2 + x - 1$	+	0	-	+

Conclusion :  $S = ]-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}[$