

Résoudre une équation

L'objectif final de cette fiche est de savoir résoudre les *équations du second degré à une inconnue x* , c'est-à-dire les équations qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a , b et c sont des réels donnés ($a \neq 0$)

I. Equations du 1^{er} degré (rappels de 3^{ème})

Ce paragraphe n'a pas été traité en cours, mais c'est un rappel de 2^{nde} utiles aux élèves ayant quelques difficultés pour comprendre de nombreuses transformations d'équations...

Méthode

Pour résoudre une équation du 1^{er} degré, on utilise les règles suivantes pour conserver l'égalité :

- ☞ On ajoute ou on soustrait un même nombre aux deux membres de l'égalité ;
- ☞ On multiplie ou on divise par un même nombre (différent de 0) les deux membres de l'égalité.

Exemple détaillé Résoudre l'équation $3x + 1 = 7x - 2$.

- ☞ Pour « regrouper les x » dans un même membre, on soustrait $3x$ à chaque membre de l'égalité :

$$3x + 1 - 3x = 7x - 2 - 3x$$

$$\text{On réduit : } 1 = 4x - 2$$

- ☞ De la même manière, on ajoute 2 à chaque membre de l'égalité :

$$\text{On obtient : } 3 = 4x$$

- ☞ On divise par 4 chaque membre de l'égalité :

$$\text{On obtient : } \frac{3}{4} = x \quad \text{ou encore} \quad x = \frac{3}{4}$$

Conclusion : L'équation $3x + 1 = 7x - 2$ a une solution : $x = \frac{3}{4}$. On note aussi : $S = \left\{ \frac{3}{4} \right\}$.

II. Equations du type $x^2 = a$

Rappel

Soit a un nombre donné.

- ✓ Si a est négatif, l'équation $x^2 = a$ n'a aucune solution.
- ✓ Si $a = 0$, l'équation $x^2 = 0$ a une seule solution : $x = 0$.
- ✓ Si a est positif, l'équation $x^2 = a$ a deux solutions $x = -\sqrt{a}$ et $x = \sqrt{a}$.

EXERCICE TYPE 1 Résoudre les équations $x^2 = -\pi$; $x^2 = 169$ et $(3x + 2)^2 = 0$

Solution 1. L'équation $x^2 = -\pi$ n'a aucune solution car $-\pi < 0$ $S = \emptyset$

2. L'équation $x^2 = 169$ a deux solutions : $x = -\sqrt{169} = -13$ et $x = \sqrt{169} = 13$ $S = \{-13, 13\}$

3. L'équation $(3x + 2)^2 = 0$ revient à : $3x + 2 = 0$ et donc à : $3x = -2$ soit : $x = -\frac{2}{3}$

L'équation $(3x + 2)^2 = 0$ a donc une seule solution : $x = -\frac{2}{3}$. $S = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$

III. Résoudre une « équation-produit »

Propriété Si un produit est égal à 0, alors l'un de ces facteurs est égal à 0.

EXERCICE TYPE 2 Résoudre l'équation $(3x - 1)(2x + 1) = 0$.

Solution : Si un produit est nul, alors l'un de ces facteurs est nul.

Donc :

$$\begin{array}{ll} \text{soit } 3x - 1 = 0 & \text{soit } 2x + 1 = 0 \\ 3x = 1 & 2x = -1 \\ x = \frac{1}{3} & x = -\frac{1}{2} \end{array}$$

L'équation $(3x - 1)(2x + 1) = 0$ a donc deux solutions : $x = \frac{1}{3}$ et $x = -\frac{1}{2}$.

$$S = \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \right\}$$

IV. Résoudre une équation du 2nd degré : $ax^2 + bx + c = 0$ (le cas général)

Etude On souhaite résoudre une équation donnée sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$). En utilisant la forme canonique d'un trinôme (voir fiche « Expressions algébriques »),

cela revient à résoudre : $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$

ou encore, comme $a \neq 0$, $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ (forme *)

soit $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

D'après le paragraphe I.,

- Si $\Delta < 0$, cette équation ne peut pas avoir de solution...

- Si $\Delta = 0$, cette équation a une unique solution.

Dans ce cas, on a alors : $x + \frac{b}{2a} = 0$, soit $x = -\frac{b}{2a}$

- Si $\Delta > 0$, on sait que cette équation a deux solutions.

A partir de la forme * ci-dessus, on peut factoriser grâce à la relation $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

On a alors : $\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0$

Donc les deux solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Définition et théorème

On considère une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

On note Δ et on appelle **discriminant** le nombre : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, cette équation n'a aucune solution.

- Si $\Delta = 0$, cette équation a une unique solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$

- Si $\Delta > 0$, cette équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

EXERCICE TYPE 3Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

(a) $x^2 + x + 1 = 0$ (b) $-2x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0$ (c) $6x^2 + x - 1 = 0$

Solution : Dans chaque cas, il faut commencer par calculer le discriminant :

(a) $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$

Comme $\Delta < 0$, l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a aucune solution.

$$\mathbf{S = \emptyset}$$

(b) $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-2) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 4 - 4 = 0$

Comme $\Delta = 0$, l'équation $-2x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0$ a une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times (-2)} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}}$$

(c) $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 1 + 24 = 25$

Comme $\Delta > 0$, l'équation $6x^2 + x - 1 = 0$ a deux solutions :

$$\bullet \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \times 6} = \frac{-1 - 5}{2 \times 6} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \times 6} = \frac{-1 + 5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{S = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\}}$$