FICHE n°5
Transformer l'écriture algébrique d'un trinôme

L'objectif de cette fiche est principalement d'apprendre à savoir modifier la forme d'un ***trinôme***, c'est-à-dire d'une expression algébrique qui peut s'écrire sous la forme :

$$ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Avec l'objectif ci-dessus, on prendra soin de réviser le programme de 2nde.
En particulier, on rappelle que :

¤ La ***forme développée*** d'une expression littérale est la forme sous laquelle celle-ci s'écrit comme une somme (ou différence) de termes.
La ***forme factorisée*** d'une expression littérale est la forme sous laquelle celle-ci s'écrit comme un produit de facteurs.

¤ Pour développer ou factoriser une expression littérale, on peut utiliser la distributivité et les identités remarquables vues depuis le collège, ci-dessous rappelées :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

formes factorisées — *formes développées*

Propriété - définition (*Cette formule n'est pas à connaître par cœur…*)

Pour tout nombre réel x, les nombes a, b et c étant donnés, avec $a \neq 0$,

on a : $$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad \text{avec } \Delta = b^2 - 4ac}$$

La forme obtenue s'appelle la ***forme canonique*** du trinôme.

Preuve Développons la forme canonique pour la comparer à la forme développée…

$$\begin{aligned} a\left[x^2 + 2\times x\times\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

EXERCICE TYPE

On considère le trinôme $P(x) = 2x^2 + 12x + 10$.

1. a. Déterminer la forme canonique de ce trinôme.
   b. En déduire la forme factorisée de $P(x)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
   a. $P(x) = 0$ b. $P(x) = -8$ c. $P(x) = 10$.

L'idée Pour trouver la forme canonique du trinôme P, de la forme $ax^2 + bx + c$.
On commence par factoriser par a, puis on cherche une identité remarquable du type $(x + \ldots)^2$ ou $(x - \ldots)^2$.

Solution

$6\boldsymbol{x} = 2 \times \boldsymbol{x} \times \underline{3}$ et $3^2 = 9$

1. a. $2x^2 + 12x + 10 = 2[\ x^2 + 6x + 5\ ]$

$= 2[\ x^2 + \mathbf{6x} + 9 - 9 + 5\ ]$

$= 2[\ (x+3)^2 - 4\ ]$

Cette forme est dite la ***forme canonique*** de trinôme P

b. A partir de la forme canonique, on peut déterminer la forme factorisée de P grâce à l'identité remarquable $\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$:

$P(x) = 2[\ (x+3)^2 - 4\ ] = 2[\ (x+3)^2 - 2^2\ ]$

$= 2[\ (x+3) + 2][\ (x+3) - 2]$

$= 2[x + 5][x + 1]$

2. a. Pour résoudre une équation de la forme $P(x) = 0$, la forme la plus adaptée est la forme factorisée → Equations-produit (voir fiche « Equations »).

Pour s'entraîner : vérifier que $\mathbf{S = \{-5\ ,-1\}}$.

b. Remarquons que, grâce à la forme canonique obtenue ci-dessus, on a : $P(x) = 2(x+3)^2 - 8$.
Utilisons cette forme pour résoudre l'équation $P(x) = -8$.

En effet : $2(x+3)^2 - 8 = -8$

$2(x+3)^2 = 0$

Comme $2 \neq 0$: $(x+3)^2 = 0$ (voir fiche « Equations »)

D'où : $x + 3 = 0$

$x = -3$

Conclusion : $\mathbf{S = \{-3\}}$

c. Pour résoudre l'équation de la forme $P(x) = 10$, la forme la plus adaptée est la forme développée puisqu'il y a le terme 10…
En effet, on a ainsi :

$2x^2 + 12x + 10 = +10$ *On ajoute 4 dans les deux membres de l'égalité…*

$2x^2 + 12x = 0$ *On factorise par x pour obtenir une équation-produit…*

$2x(x + 6) = 0$ *On résout l'équation-produit (cf. fiche « Equations »).*

Pour s'entraîner : vérifier que $\mathbf{S = \{0\ ,-6\}}$