FICHE n°2

Schéma de Bernoulli et loi binomiale

I. Qu'est ce qu'un schéma de Bernoulli ? une loi binomiale ?

Définitions

¤ Une ***épreuve de Bernoulli*** est une expérience aléatoire à deux issues.

¤ On appelle ***succès*** (S) l'une de ces deux issues et ***échec*** l'autre issue ($\overline{S}$).

¤ On appelle ***paramètre*** et on note p la probabilité d'obtenir le succès : $p = p(S)$.
Par ailleurs, on note parfois q la probabilité d'obtenir l'échec : $q = p(\overline{S}) = 1 - p$.

¤ L'expérience aléatoire consistant à répéter n fois de manière indépendante une même épreuve de Bernoulli de paramètre p s'appelle un ***schéma de Bernoulli*** de paramètres n et p.

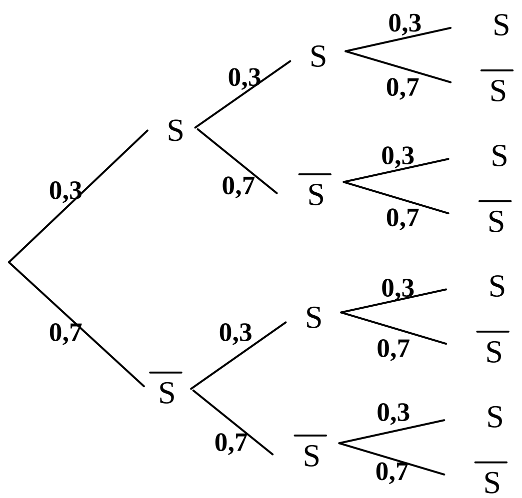
¤ La loi de probabilité de la variable aléatoire X comptant le nombre de succès obtenus dans un tel schéma de Bernoulli est appelée ***loi binomiale*** de paramètres n et p et est notée $\mathcal{B}(n\,;\,p)$

Exemple Considérons les deux expériences aléatoires suivantes :

Expérience n°1 On lance 8 fois une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir face soit 0,3. Notons F la variable aléatoire comptant le nombre de fois où l'on obtient face.

Expérience n°2 On effectue 8 tirages avec remise dans une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires. Notons R la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

Ces deux expériences correspondent à une répétition de 8 épreuves de Bernoulli de probabilité 0,3 (identiques et indépendantes). Elles peuvent être modélisées par un même schéma de Bernoulli selon l'arbre suivant :



Ces deux expériences correspondent ainsi à un même schéma de Bernoulli et les variables aléatoires F et R suivent en fait la même loi de probabilité, la loi binomiale $\mathcal{B}(8\,;\,0,3)$.

Contre-exemple

Si, dans l'expérience n°2 ci-dessus, il n'y avait pas eu remise entre chaque tirage, les expériences successives n'auraient pas été indépendantes (fonction du tirage précédent) et non identiques (répartition des boules différentes à chaque tirage).
Une telle situation ne correspond pas à un schéma de Bernoulli.

II. Etude de l'arbre de probabilité d'un schéma de Bernoulli : coefficients binomiaux

Considérons un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et un entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$.

<u>*L'analyse*</u> Sur l'arbre de probabilité correspondant, si un chemin comporte k succès (de probabilité p), alors il comporte $n - k$ échecs de probabilité $q = 1 - p$.
D'après le principe multiplicatif, la probabilité d'un tel chemin est : $p^k \times q^{n-k} = p^k \times (1-p)^{n-k}$.
Autrement dit, chaque chemin comportant k succès a une même probabilité, et donc, étudier un schéma de Bernoulli revient en fait à déterminer le nombre de chemins ayant k succès.

<u>*Définition*</u> On appelle ***coefficient binomial*** le nombre de chemins dans l'arbre pondéré réalisant k succès pour n répétitions. Ce nombre se note $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$ et se lit « k parmi n ».

<u>*Remarques*</u> Par convention : $\binom{0}{0} = 1$ et, pour tout entier naturel n, on a : $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{n} = 1$.

<u>*Symétrie des coefficients binomiaux*</u> $\boxed{\text{Pour } 0 \leq k \leq n, \text{ on a : } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.}$

preuve : Ce résultat est en fait une conséquence immédiate du fait que, dans un schéma de Bernoulli, il y autant de chemin réalisant k succès que de chemins réalisant k échecs, c'est-à-dire $n - k$ échecs…

<u>*La formule de Pascal*</u> $\boxed{\text{Pour } 0 \leq k \leq n-1, \text{ on a : } \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.}$

preuve : Par définition, $\binom{n+1}{k+1}$ est nombre de chemins comportant $k + 1$ succès pour $n + 1$ répétitions.
Ces chemins se décomposent en deux parties disjointes :
¤ ceux qui commence par un succès : l'arbre représentant les épreuves suivantes est alors un arbre à n épreuves où il ne reste plus qu'à choisir k succès : il y a donc $\binom{n}{k}$ chemins de ce type.
¤ ceux qui commence par un échec : l'arbre représentant les épreuves suivantes est alors un arbre à n épreuves où il faut encore choisir les $k + 1$ succès : il y a donc $\binom{n}{k+1}$ chemins de ce type.
On en déduit, par somme du nombre de ces chemins possibles, le formule de Pascal.

<u>*Pour calculer des coefficients binomiaux*</u>

☞ Avec le triangle de Pascal : ci-contre.

☞ Avec votre calculatrice.
(dans le répertoire Math… voir livre + manuel selon modèles…) ;

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	**3**	**3**	1		
4	1	**4**	**6**	**4**	1	
5	1	**5**	**10**	**10**	**5**	1

<u>*EXERCICE TYPE 1*</u> ***Calculer des coefficients binomiaux***

✓ *Avec les propriétés :* $\binom{17}{0} = 1$; $\binom{12}{11} = \binom{12}{12-11} = \binom{12}{1} = 12$; $\binom{45}{45} = 1$.

✓ *Avec le triangle de Pascal :* $\binom{4}{2} = 6$; $\binom{5}{3} = 10$.

✓ *Avec la calculatrice :* $\binom{9}{3} = 84$; $\binom{17}{5} = 6\ 188$.

III. *Etude de la loi binomiale : loi de probabilité, espérance et écart-type*

Dans ce paragraphe, X désigne une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;p)$.
On considère un entier naturel k et on note $q = 1 - p$.

Théorème $\boxed{\text{Pour } 0 \leq k \leq n, \text{ on a : } \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k} = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}.}$

preuve : Par définition, il y a $\binom{n}{k}$ chemins menant à l'évènement $(X = k)$.
Et chacun d'eux comporte k succès (de probabilité p) et $n - k$ échecs de probabilité $q = 1 - p$, ce qui correspond, d'après le principe multiplicatif, à une probabilité $p^k \times q^{n-k} = p^k \times (1-p)^{n-k}$…

EXERCICE TYPE 2 ***Calculer des probabilités pour une loi binomiale (calculatrice)***

Enoncé Une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(10\ ;0,25)$.
A 10^{-2} près, déterminer $P(X = 3)$, puis en déduire $P(X \geq 4)$ et $P(4 \leq X \leq 10)$.

Solution … à suivre prochainement…

EXERCICE TYPE 3 ***Représenter par un diagramme en bâtons une loi binomiale***

Enoncé Une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(4\ ;0,7)$.
1. Avec la calculatrice, déterminer la loi de probabilité de X.
2. Représenter graphiquement la loi de probabilité de X.

Solution … à suivre prochainement…

Théorème (admis) $\boxed{E(X) = np \quad ; \quad V(X) = npq = np(1-p) \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}}$

EXERCICE TYPE 4 ***Calculer l'espérance et l'écart-type d'une loi binomiale***

Enoncé Une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(4\ ;0,7)$.
1. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter ce résultat.
2. Calculer l'écart-type de X.

Solution … à suivre prochainement…