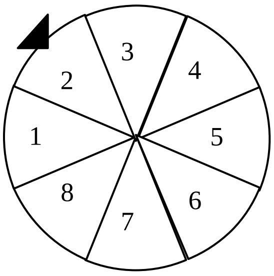
1ère S

FICHE n°1
Variables aléatoires

I. Probabilités : petit bilan de 2nde…

<u>*EXERCICE TYPE 1*</u> *(voir évaluation diagnostique d'entrée en 1ère S)*

<u>*Enoncé*</u> On fait tourner une roue équilibrée comme ci-dessous séparées en 8 secteurs identiques, puis on lit le numéro en face du repère.



On considère les évènements suivants :

- ☞ A : « le numéro est strictement supérieur à 5 »
- ☞ B : « le numéro est impair »

Déterminer les probabilités suivantes : p(A), p(B), $p(A\cap B)$, $p(A\cup B)$ et $p(\overline{A})$

<u>*Solution*</u> L'***univers*** Ω comprend huit ***issues*** possibles : Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}

Comme la roue est dite « équilibrée », les évènements élémentaires sont **équiprobables.**

La probabilité d'un évènement est égale à $\dfrac{\textit{\textbf{nombre de cas favorables}}}{\textit{\textbf{nombre de cas possibles}}}$.

- ➢ A = {6 ; 7 ; 8} donc $p(A) = \dfrac{3}{8}$.
- ➢ B = {1 ; 3 ; 5 ; 7} donc $p(B) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$
- ➢ $A\cap B$ = {7} donc $p(A\cap B) = \dfrac{1}{8}$
- ➢ $A\cup B$ = {1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8} donc $p(A\cup B) = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

$A\cap B$: A et B

$A\cup B$: A ou B

<u>*Remarque*</u> : <u>dans un cas d'équiprobabilité</u>, on peut aussi utiliser la formule :

$$\boxed{p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)}$$

$$p(A\cup B) = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

- ➢ $\overline{A}$ est l'évènement contraire de A, c'est-à-dire $\overline{A}$ = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5} donc $p(\overline{A}) = \dfrac{5}{8}$

<u>*Remarque*</u> : <u>dans un cas d'équiprobabilité</u>, on peut aussi utiliser aussi la formule :

$$\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$$

$$p(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

II. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

<u>*Définition*</u> Lorsqu'à chaque événement élémentaire d'une expérience aléatoire on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une ***variable aléatoire***.
Lorsqu'à chaque issue possible pour une variable aléatoire X on associe la probabilité correspondante, on dit que l'on définit la ***loi de probabilité de X.***

<u>EXERCICE TYPE 2</u> ***Déterminer une loi de probabilité***

<u>*Enoncé*</u> On lance un dé non pipé.
On gagne 5 € si le 6 sort, on perd 2 € si le 1 sort et on perd 1 € dans les autres cas.
On note X la variable aléatoire donnant le gain, positif ou négatif, correspondant.
Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité de X.

<u>*Notations*</u> On note : (X = 5) l'évènement « X prend la valeur 5 »
p(X= 5) la probabilité de l'évènement « X prend la valeur 5 »

<u>*Solution*</u>

Avant de déterminer les probabilités, il faut d'abord déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X correspondant aux gains possibles :

Les valeurs possibles par X sont X = –2, X = –1, ou X = 5.

On détermine alors ensuite la probabilité de chacune de ces valeurs possibles :

¤ p(X = –1) est en fait la probabilité de l'évènement « Obtenir le 2, 3, 4 ou 5 ».
Comme le dé est non pipé, les évènements élémentaires sont **équiprobables**.

$$p(\text{X} = -1) = \frac{\textbf{\textit{nombre de cas favorables}}}{\textbf{\textit{nombre de cas possibles}}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

¤ De la même manière, $p(\text{X} = -2) = \frac{1}{6}$ et $p(\text{X} = 5) = \frac{1}{6}$

¤ On présente souvent une **loi de probabilité** dans un tableau :

x_i	–2	–1	5
$p(\text{X} = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

<u>*Remarques*</u>

¤ La somme des probabilités décrites dans une loi de probabilités est toujours égale à 1…

¤ A une même expérience aléatoire, on peut associer plusieurs variables aléatoires.
Par exemple, avec le lancer de dé ci-dessus, on aurait pu considérer une variable aléatoire Y qui au nombre obtenu associe 1 si le nombre est un multiple de 3 et 0 sinon…
La **loi de probabilité** de Y est :

y_i	0	1
$p(\text{Y} = y_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

¤ Dans le TP « Simulation d'une situation de probabilité avec un tableur », on a pu observer que :

Si on effectue suffisamment de lancers ou quand le nombre de tirages simulés est grand,
les fréquences observées tendent à s'approcher de la probabilité théorique.

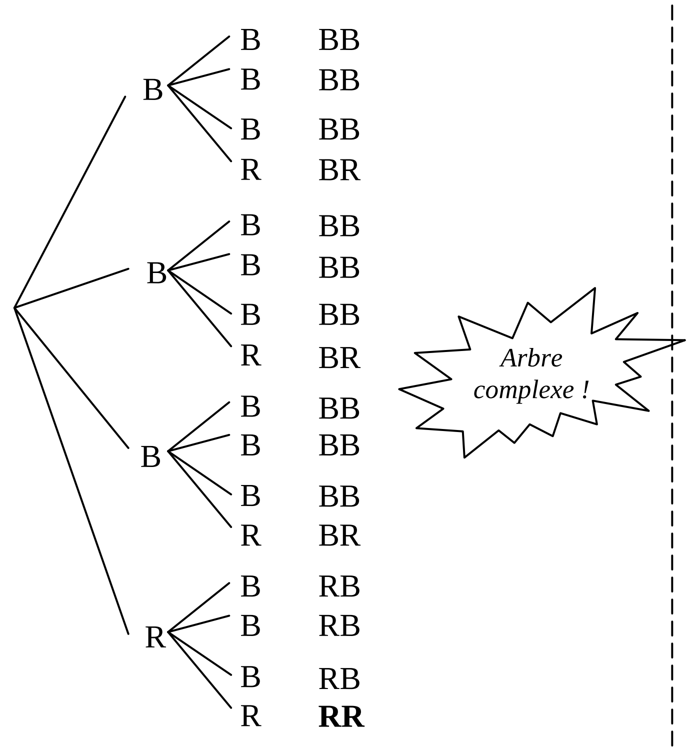
Voir également la fiche « Echantillonnages »…

III. *Utiliser des arbres pondérés de probabilités*

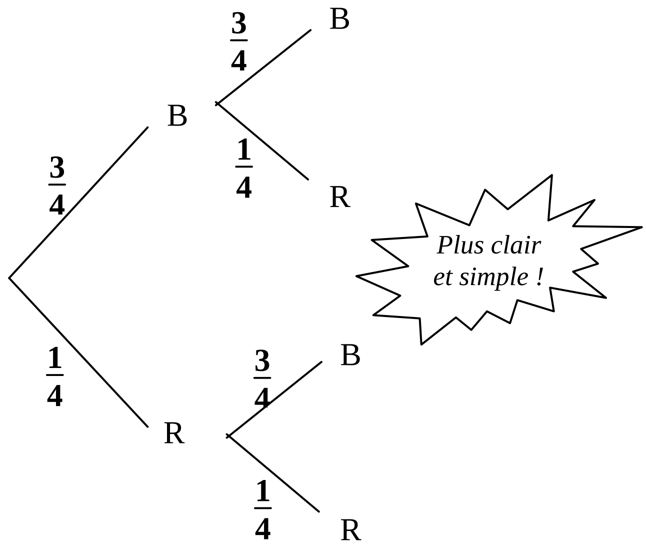
<u>*Un exemple pour comprendre*</u>

Dans une urne contenant trois boules blanches et une boule rouge, indiscernables au toucher, on tire une 1$^{\text{ère}}$ boule, puis, après avoir remis la 1$^{\text{ère}}$ boule, on tire une 2$^{\text{ème}}$ boule.
Quelle est la probabilité de l'évènement A : « obtenir deux boules blanches » ?

Analyse En 2$^{\text{nde}}$ | En 1$^{\text{ère}}$



Dans cet arbre, on regroupe les branches identiques mais on indique la probabilité de chacune pour se rappeler que chaque branche n'est pas équiprobable.



Conclusion : p(A) = $\mathbf{\frac{9}{16}}$. | p(A) = $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \mathbf{\frac{9}{16}}$

<u>*Principe multiplicatif*</u>

Dans un arbre pondéré de probabilités, **la probabilité d'une issue finale est le produit des probabilités des branches intermédiaires.**

<u>*Remarque*</u> Dans l'exemple ci-dessus, les deux tirages sont dits ***indépendants***.
En effet, les résultats du 2$^{\text{ème}}$ tirage sont identiques quelque soit le résultat du 1$^{\text{er}}$ tirage…

<u>EXERCICE TYPE 3</u> ***Utiliser des arbres pondérés de probabilités***

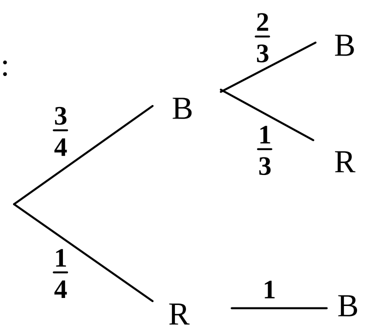
<u>*Enoncé*</u> Déterminer la loi de la variable aléatoire X correspondant au nombre de boules blanches obtenues si on réalise une expérience comme ci-dessus mais sans remettre la boule après le 1$^{\text{er}}$ tirage.

<u>*Solution*</u> Attention, ici les deux tirages ne sont pas indépendants.
Cette expérience peut être modéliser par l'arbre pondéré ci-contre :
Grâce à cet arbre, on obtient ainsi :

$P(X = 1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ et $P(X = 2) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donc :

$X = x_i$	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



IV. *Espérance d'une variable aléatoire*

Définition Considérons une variable aléatoire X qui prend respectivement les valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.

L'***espérance mathématique*** de X est le nombre, noté **E(X)**, défini par :

$$\mathbf{E(X)} = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + \dots + x_n \times p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i \;.$$

Remarque Dans le TP « Simulation d'une situation de probabilité avec un tableur », on a pu observer que :

Lorsque l'on répète une expérience aléatoire en grand nombre de fois, la moyenne de la série statistique tend à s'approcher de l'espérance mathématique.

EXERCICE TYPE 4 ***Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire***

Enoncé Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X décrite à l'exercice type 2 ci-dessus.

Solution $E(X) = (-2)\times\frac{1}{6} + (-1)\times\frac{2}{3} + 5\times\frac{1}{6} = -\frac{2}{6} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = -\frac{2}{6} - \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = -\frac{6}{6} + \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$

Interprétation L'espérance mathématique est négative : cela signifie que, après un grand nombre de lancers, il y a de forte chance pour que j'ai perdu de l'argent à ce jeu…
Attention, si j'ai beaucoup de chance, je peux quand même repartir en ayant gagné de l'argent : il n'y a aucune certitude…

Propriété de linéarité Soit a et b deux réels, alors on a : $E(aX + b) = aE(X) + b$

Preuve Si la variable aléatoire X qui prend respectivement les valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, alors la variable aléatoire aX + b prend respectivement les valeurs $ax_1+b, ax_2+b, \dots, ax_n+b$ avec les probabilités $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.

d'où :
$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} (ax_i+b)\times p_i = \sum_{i=1}^{n} (a\, x_i\, p_i + b\, p_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a\, x_i\, p_i + \sum_{i=1}^{n} b\, p_i \\ &= a \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i + b \sum_{i=1}^{n} p_i \qquad \textit{(factorisations)} \\ &= a \quad E(X) \quad + \quad b \qquad \textit{car} \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i = E(X) \text{ et } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{aligned}$$

EXERCICE TYPE 4 ***Utiliser la propriété de linéarité de l'espérance***

Enoncé On considère toujours la variable aléatoire X indiquant la gain comme défini ci-dessus.

1. Décrivez par des phrases la variable aléatoire Z = 2X + 1.
2. Donner la loi de probabilité de Z.
3. Déterminer E(Z) le plus simplement possible.

Solution

1. La variable aléatoire Z double les gains relatifs correspondant à X en ajoutant 1 €…
2.

z_i	–3	–1	11
$p(Z = z_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

3. $E(Z) = E(2X+1) = 2\times E(X) + 1 = 2 \times (-\frac{1}{6}) + 1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

V. *Variance et écart-type d'une variable aléatoire*

<u>*Définition*</u> Considérons une variable aléatoire X qui prend respectivement les valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.

¤ La ***variance*** de X est le nombre, noté **V(X)**, défini par :

$$\mathbf{V(X) = [x_1 - E(X)]^2 \times p_1 + [x_2 - E(X)]^2 \times p_2 + \dots + [x_n - E(X)]^2 \times p_n = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p_i} .$$

¤ L'***écart-type*** de X est le nombre, noté **σ(X)**, défini par :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

$x_i - E(X)$ est l'***écart*** entre la valeur x_i et **E(X).**

<u>*Remarque*</u> La variance, et surtout l'écart-type, permettent de comparer la ***dispersion*** des valeurs d'une série autour de l'espérance…

<u>*EXERCICE TYPE 5*</u> *Déterminer la variance d'une variable aléatoire*

<u>*Enoncé*</u> Déterminer la variance et l'écart-type de la variable aléatoire T dont la loi de probabilité est :

t_i	–1	0	2
$p(T = t_i)$	0,2	0,5	0,3

<u>*Solution*</u> ¤ Déterminons tout d'abord l'espérance mathématique de T :

$E(T) = (-1)\times0{,}2 + 0\times0{,}5 + 2\times0{,}3 = 0{,}4$

¤ On a alors : $V(T) = [(-1) - 0{,}4]^2\times0{,}2 + [0 - 0{,}4]^2\times0{,}5 + [2 - 0{,}4]^2\times0{,}3 = 1{,}24$

$\sigma(T) = \sqrt{V(T)} = \sqrt{1{,}24} \approx 1{,}1$.

<u>*Propriétés*</u>

¤ $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ (*)

¤ Soit a et b deux réels, alors on a : $V(aX + b) = a^2 V(X)$ (**)

<u>*Preuve*</u> Si la variable aléatoire X qui prend respectivement les valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, alors la variable aléatoire X^2 prend respectivement les valeurs $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ avec les probabilités $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.

¤ $V(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2\times E(X)\times x_i + [E(X)]^2 \right) p_i$ *(développement)*

$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2\times E(X)\times x_i p_i + [E(X)]^2 p_i$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i + \sum_{i=1}^{n} -2\times E(X)\times x_i p_i + \sum_{i=1}^{n} [E(X)]^2 p_i$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2E(X)\times \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + [E(X)]^2 \sum_{i=1}^{n} p_i$

$= E(X^2) - 2E(X)\times E(X) + [E(X)]^2$ car $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

$= E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$. On a démontré (*).

¤ $V(aX + b) = E((aX + b)^2) - [E(aX + b)]^2$ en utilisant la propriété (*)

$= E(a^2 X^2 + 2abX + b^2) - [aE(X) + b]^2$

$= a^2 E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - [a^2 [E(X)]^2 + 2abE(X) + b^2]$

$= a^2 E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2 [E(X)]^2 - 2abE(X) - b^2$

$= a^2 E(X^2) - a^2 [E(X)]^2 = a^2 \left(E(X^2) - [E(X)]^2 \right) = a^2 V(X)$ d'où (**).

EXERCICE TYPE 6 ***Utiliser les propriétés de la variance***

Enoncé On considère la variable aléatoire G dont la loi de probabilité est :

g_i	–10	0	2
$p(G = g_i)$	0,3	0,2	0,5

1. Calculer la variance de G avec la formule (*).

2. Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire H dont la variance serait quatre fois celle de G.

Solution **1.** $E(G) = (-10)\times0,3 + 0\times0,2 + 2\times0,5 = -2$; $E(G^2) = 100\times0,3 + 0\times0,2 + 4\times0,5 = 32$

Donc $V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 32 - (-2)^2 = 32 - 4 = 28$.

2. L'énoncé indique que : $V(H) = 4\ V(G) = 2^2\ V(G)$

soit avec (**) que : $V(H) = V(2G)$.

Il suffit donc que les valeurs prises par H soit le double de celles de G.

Autrement dit, la loi de probabilité de H serait :

h_i	–20	0	4
$p(H = h_i)$	0,3	0,2	0,5