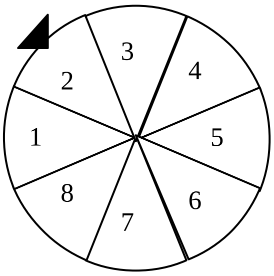
1$^{\text{ère}}$ ES

FICHE n°12
Probabilités…

I. Petit bilan de 2$^{\text{nde}}$…

EXERCICE TYPE 1 *(voir évaluation diagnostique d'entrée en 1$^{\text{ère}}$ ES)*



<u>*Enoncé*</u>

On fait tourner la roue équilibrée ci-contre,
puis on lit le numéro en face du repère.

On considère les évènements suivants :

- ☞ A : « le numéro est strictement supérieur à 5 »
- ☞ B : « le numéro est impair »

Déterminer les probabilités suivantes : P(A), p(B), P($A \cap B$), p($A \cup B$) et p($\overline{A}$)

<u>*Solution*</u>

L'***univers*** Ω comprend huit ***issues*** possibles : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$

Comme la roue est équilibrée, les évènements élémentaires sont **équiprobables**, et la probabilité d'un évènement est égale à $\dfrac{\textit{\textbf{nombre de cas favorables}}}{\textit{\textbf{nombre de cas possibles}}}$.

- ➢ $A = \{6 ; 7 ; 8\}$ donc $P(A) = \dfrac{3}{8}$.
- ➢ $B = \{1 ; 3 ; 5 ; 7\}$ donc $P(B) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$
- ➢ $A \cap B = \{7\}$ donc $P(A \cap B) = \dfrac{1}{8}$

$A \cap B$: A et B

$A \cup B$: A ou B

- ➢ $A \cup B = \{1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$ donc $P(A \cup B) = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

  <u>*Remarque*</u> : <u>dans un cas d'équiprobabilité</u>, on peut aussi utiliser la formule :

  $$\boxed{\mathbf{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}}$$

  $$p(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

- ➢ $\overline{A}$ est l'évènement contraire de A, c'est-à-dire $\overline{A} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ donc $P(\overline{A}) = \dfrac{5}{8}$

  <u>*Remarque*</u> : <u>dans un cas d'équiprobabilité</u>, on peut aussi utiliser aussi la formule :

  $$\boxed{\mathbf{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}}$$

  $$p(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

II. *Variable aléatoire*

Définition Lorsqu'à chaque événement élémentaire d'une expérience aléatoire on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une ***variable aléatoire***.
Lorsqu'à chaque issue possible pour une variable aléatoire X on associe la probabilité correspondante, on dit que l'on définit la ***loi de probabilité de X.***

EXERCICE TYPE 2 ***Déterminer une loi de probabilité***

Enoncé On lance un dé non pipé.
On gagne 5 € si le 6 sort, on perd 2 € si le 1 sort et on perd 1 € dans les autres cas.
On note X la variable aléatoire donnant le gain, positif ou négatif, correspondant.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité de X.

Notations On note : (X = 5) l'évènement « X prend la valeur 5 »
P(X= 5) la probabilité de l'évènement « X prend la valeur 5 »

Solution

1. Les valeurs prises par la variable aléatoire X correspondent aux gains possibles, donc soit X = –2, soit X = –1, soit X = 5.
2. ¤ p(X = –1) est la probabilité d'obtenir le 2, 3, 4 ou 5.
Comme le dé est non pipé, les évènements élémentaires sont **équiprobables**.
$$p(X = -1) = \frac{\textbf{\textit{nombre de cas favorables}}}{\textbf{\textit{nombre de cas possibles}}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
¤ De la même manière, $p(X = -2) = \frac{1}{6}$ et $p(X = 5) = \frac{1}{6}$
¤ On présente souvent une **loi de probabilité** dans un tableau :

x_i	–2	–1	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Remarque La somme des probabilités décrites dans une loi de probabilités est toujours égale à 1.

III. *Espérance mathématique*

Définition Considérons une variable aléatoire X qui prend les valeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.
L'espérance mathématique de X est le nombre noté E(X) défini par :
$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + x_3 \times P(X = x_3) + \ldots + x_n \times P(X = x_n) .$$

Remarque Lorsque l'on répète une expérience aléatoire en grand nombre de fois, la moyenne de la série statistique tend à s'approcher de l'espérance mathématique.

EXERCICE TYPE 3 ***Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire***

Enoncé Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X décrite à l'exercice type 2 ci-dessus.

Solution $E(X) = (-2)\times\frac{1}{6} + (-1)\times\frac{2}{3} + 5\times\frac{1}{6} = -\frac{2}{6} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = -\frac{2}{6} - \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = -\frac{6}{6} + \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$

Interprétation L'espérance mathématique est négative : cela signifie que, après un grand nombre de lancers, il y a de forte chance pour que j'aie perdu de l'argent à ce jeu…
Attention, si j'ai beaucoup de chance, je peux quand même repartir en ayant gagné de l'argent : il n'y a aucune certitude…

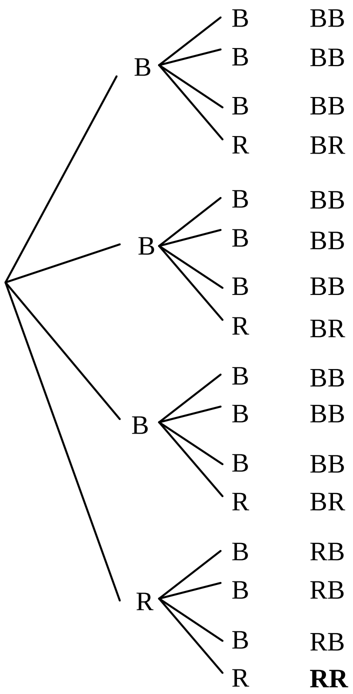
IV. Utiliser des arbres pondérés de probabilités

<u>*Un exemple pour comprendre*</u>

Dans une urne contenant trois boules blanches et une boule rouge, indiscernables au toucher, on tire une $1^{\text{ère}}$ boule, puis, après avoir remis la $1^{\text{ère}}$ boule, on tire une $2^{\text{ème}}$ boule.
Quelle est la probabilité de l'évènement A : « obtenir deux boules rouges » ?

Analyse

En 2^{nde}

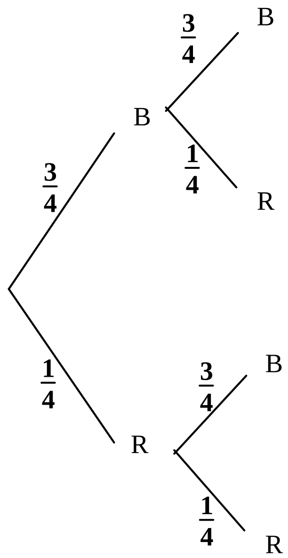


Conclusion : p(A) = $\mathbf{\dfrac{1}{16}}$.

mais l'arbre est bien long à réaliser…

En $1^{\text{ère}}$

Dans cet arbre, on regroupe les branches identiques mais on indique la probabilité de chacune pour se rappeler que chaque branche n'est pas équiprobable.



$$p(A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{16}}$$

mais cet arbre est plus rapide à réaliser et plus clair…

<u>*A savoir*</u>

Pour la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une issue finale est le produit des probabilités de chaque résultat intermédiaire.

<u>*EXERCICE TYPE 4*</u> ***Utiliser des arbres pondérés de probabilités***

<u>*Enoncé*</u> On se donne :

☞ une urne contenant dix boules indistinguables au toucher dont sept boules numérotées 1 et trois boules numérotées 2 ;

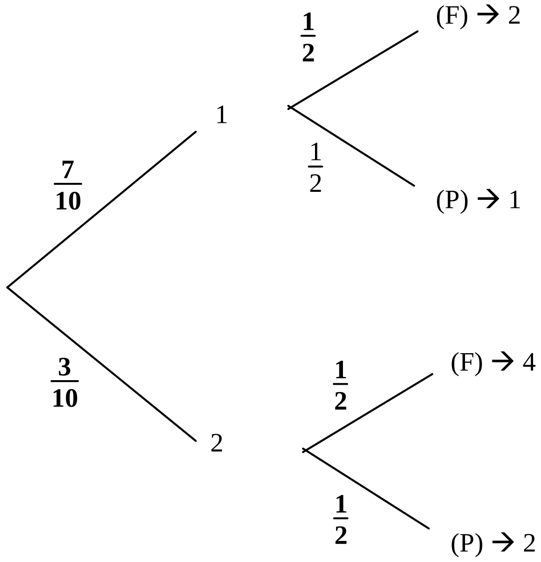
☞ et une pièce équilibrée ;

On considère l'expérience aléatoire suivante :

« *On prélève une boule dans l'urne, on note son numéro, puis on lance la pièce…*
Si le lancer donne Face, le nombre final est le double du numéro obtenu au tirage,
sinon le nombre final est identique au tirage »

Déterminer la loi de la variable aléatoire X correspondant au nombre final ainsi obtenu.

<u>*Solution*</u> Réalisons un arbre pondéré pour étudier les différentes valeurs du nombre obtenu et leur probabilité (voir page suivante).



Grâce à cet arbre, on obtient ainsi :

$$P(1) = \frac{7}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{20}$$

$$P(4) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{20}$$

$$P(2) = \frac{7}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{20} + \frac{3}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Représentons la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme d'un tableau :

$X = x_i$	1	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{20}$