

Utiliser les différents types de pourcentage

Lorsque l'on étudie un problème avec des pourcentages, il convient d'abord de se poser la question du type de pourcentage utilisé dans ce problème : le pourcentage représente-t-il une partie d'un ensemble (ci-après dénommé *pourcentage d'un tout*) ou représente-t-il une augmentation ou une diminution (*pourcentage d'évolution*) ?

Le programme de 1^{ère} ES s'intéresse surtout aux pourcentages d'évolution mais pour rappeler les différences entre les deux types de problèmes, cette leçon reprend les deux types de problèmes de pourcentage.

I. Appliquer un pourcentage

1. Pourcentage d'un tout

$$t \% = \frac{t}{100}$$

Dans un tableur, avec le format %, l'écriture 13% correspond au nombre 0,13.

Méthode

Prendre t % d'un nombre revient à **multiplier** ce nombre par $\frac{t}{100}$.

EXERCICE TYPE 1

Les demi-pensionnaires représentent 62,5 % de la classe de 24 élèves.
Combien y-a-t-il de demi-pensionnaires ?

Solution Cela revient à déterminer 62,5 % de 24, soit à calculer : $24 \times \frac{62,5}{100} = 24 \times 62,5 \div 100 = 15$.

Il y a **15 demi-pensionnaires** dans cette classe .

2. Pourcentage évolution (augmentation ou diminution)

Définitions et théorème

On considère un nombre t strictement positif.

☞ Lorsque d'une grandeur augmente de t %, t est appelé *pourcentage d'augmentation*.

Augmenter de t % un nombre revient à **multiplier** ce nombre par le *coefficient multiplicateur* $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.

☞ Lorsque d'une grandeur diminue de t %, t est appelé *pourcentage de diminution*.

Diminuer de t % un nombre revient à **multiplier** ce nombre par le *coefficient multiplicateur* $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$.

Démonstration

☞ Notons x_i la valeur initiale d'un nombre et x_f la valeur finale obtenue après une augmentation de t %.

L'augmentation est alors égale à $x_i \times \frac{t}{100}$. (voir paragraphe 1.)

La valeur finale est alors égale à : $x_f = x_i + x_i \times \frac{t}{100}$ soit $x_f = x_i \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$.

☞ De la même manière, notons x_i la valeur initiale d'un nombre et x_f la valeur obtenue après une diminution de t %.

On a alors : $x_f = x_i - x_i \times \frac{t}{100}$ soit $x_f = x_i \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)$.

EXERCICE TYPE 2**SOLDES : appliquer un pourcentage de réduction pour calculer le nouveau prix**

On applique une réduction de 35 % à tous les prix d'un magasin.

Compléter le tableau de prix suivant :

Prix des articles avant la réduction de 35 %	10 €	7 €	200 €	$97,50 \div 0,65 = 150 \text{ €}$
Prix des articles après la réduction de 35 %	$10 \times 0,65 = 6,50 \text{ €}$	$7 \times 0,65 = 4,55 \text{ €}$	$200 \times 0,65 = 130 \text{ €}$	97,50 €

× 0,65

Solution Dans cette situation, 35 % est un pourcentage de diminution.

On peut ainsi appliquer le coefficient multiplicateur est alors : $\left(1 - \frac{35}{100}\right) = 0,65$.

Si on appelle x_i le prix initial, le nouveau prix après réduction sera : $x_f = 0,65 x_i$.

EXERCICE TYPE 3**INFLATION : appliquer un pourcentage d'augmentation**

L'inflation correspond au pourcentage d'augmentation de la vie entre deux années consécutives.

Compléter le tableau suivant pour une inflation de 1,2 %.

Prix des articles avant l'inflation	100 €	500 €	1 200 €	$15\ 180 \div 1,012 = 15\ 000 \text{ €}$
Prix des articles après l'inflation	$100 \times 1,012 = 101,50 \text{ €}$	$500 \times 1,012 = 506 \text{ €}$	$1\ 200 \times 1,012 = 1\ 214,40 \text{ €}$	15 180

× 1,012

Solution Dans cette situation, 1,2 % est un pourcentage de d'augmentation.

On peut ainsi appliquer le coefficient multiplicateur est alors : $\left(1 + \frac{1,2}{100}\right) = 1,012$.

Si on appelle x_i le prix initial, le nouveau prix après augmentation sera : $x_f = 1,012 x_i$.

II. Déterminer un pourcentage**1. Pourcentage d'un tout**

Rappel Le pourcentage d'un tout correspond en statistiques à une fréquence en pourcentages.

Il se détermine donc selon :

$$\frac{\text{effectif du caractère étudié}}{\text{effectif total}} \times 100$$

Ce type de problème peut être représenté par un *tableau de proportionnalité*.

EXERCICE TYPE 4

Une classe de 30 élèves comprend 12 externes, dont 9 sont des filles.

- Quel est le pourcentage d'élèves externes dans cette classe demi-pensionnaires ?
- Quel est le pourcentage de filles parmi ces 12 élèves externes ?

Solution Pour ce type de calcul, il convient d'abord de bien déterminer le tout concerné...

a. $\frac{12}{30} \times 100 = 40$. 40 % des élèves de cette classe sont externes.

b. Attention, ici, le « tout » est « les 12 externes » : $\frac{9}{12} \times 100 = 75$. 75 % des externes sont des filles.

2. Pourcentage évolution (augmentation ou diminution)

Analyse On a vu au paragraphe I.2. que, dans le cas d'une augmentation de t %, on a :

$$x_f = x_i \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) \Leftrightarrow x_f = x_i \times 1 + x_i \times \frac{t}{100} \Leftrightarrow x_f - x_i = x_i \frac{t}{100} \Leftrightarrow \frac{x_f - x_i}{x_i} \times 100 = t$$

Dans le cas d'une diminution de t %, on obtient : $t = \frac{x_i - x_f}{x_i} \times 100$.

Afin d'être conforme au cours de SES de la classe de 1^{ère} ES (taux de variation), nous pouvons résumer ces deux cas en une seule formule :

Propriété $t = \frac{x_f - x_i}{x_i} \times 100$ en sachant que :
✕ si $t > 0$, il s'agit d'un pourcentage d'augmentation
✕ si $t < 0$, il s'agit d'un pourcentage de diminution

Remarque La valeur de référence pour le calcul d'un pourcentage d'évolution est toujours la valeur initiale...

EXERCICE TYPE 5 COURS d'une ACTION : déterminer les pourcentages d'évolution journalière

Le tableau suivant présente l'évolution en euros de l'action « prof.launay.free.fr » :

Jours	13/03/2012	14/03/2012	15/03/2012
Cours de l'action (en euros)	250 €	255 €	250 €

Déterminer les pourcentages d'évolution journalière du cours de cette action.

Solution ✕ entre le 13/03 et le 14/03 : $t = \frac{255 - 250}{250} \times 100 = + 2$

L'action a subi une augmentation de 2 % entre le 13/03 et le 14/03.

✕ entre le 14/03 et le 15/03 : $t = \frac{250 - 255}{255} \times 100 \approx - 1,96$

L'action a subi une baisse de son cours d'environ 1,96 % entre le 14/03 et le 15/03.

Remarque On remarque dans cet exemple que pour revenir à son cours initial du 13/03, le pourcentage de baisse n'est pas le même que le pourcentage de l'augmentation initiale.

III. Des situations particulières à connaître

1. Evolutions successives

EXERCICE TYPE 6 Déterminer le pourcentage global d'évolution lors de hausses successives

Une action augmente de 5 % entre le 1^{er} janvier 2009 et le 1^{er} janvier 2010, puis elle augmente de nouveau de 3 % au 1^{er} janvier 2011...

Quel est le pourcentage d'évolution de cette action entre 2009 et 2011 ?

Solution

Utilisons les coefficients multiplicateurs.

Entre 2009 et 2011, le cours de l'action est successivement multiplié par $\left(1 + \frac{5}{100}\right)$ puis par $\left(1 + \frac{3}{100}\right)$,

soit globalement par : $\left(1 + \frac{5}{100}\right) \times \left(1 + \frac{3}{100}\right) = 1,05 \times 1,03 = 1,0815$.

Le pourcentage d'augmentation de cette action entre 2009 et 2011 est donc de **8,15 %**.

EXERCICE TYPE 7 Déterminer le pourcentage global d'évolution : hausse suivie d'une baisse

Une action augmente de 12 % avant de subir une baisse de 12 %...
Quel est le pourcentage d'évolution globale de cette action ?

Solution Le coefficient multiplicateur correspondant à l'évolution globale est :

$$\left(1 + \frac{12}{100}\right) \times \left(1 - \frac{12}{100}\right) = 1,12 \times 0,88 = 0,9856$$

Cherchons le pourcentage correspondant à ce coefficient multiplicateur :

$$1 - 0,9856 = 0,0144 = 1,44 \%$$

Cette action a finalement subi une baisse globale de 1,44 %.

Remarque Une hausse de t % suivi d'une baisse de t % (ou inversement une baisse de t % suivi d'une hausse de t %) correspond globalement toujours à une baisse !

2. Evolution réciproque

Définition

On considère un nombre t strictement positif.

Notons x_i la valeur initiale d'un nombre et x_f la valeur finale obtenue après une augmentation de t %.

Le pourcentage de baisse de x_f pour que cette grandeur retrouve sa valeur initiale x_i est appelé **pourcentage d'évolution réciproque**.

- Remarques
- ✘ D'après les observations effectuées au cours des exercices types précédents, on a vu que le pourcentage de baisse réciproque est inférieur au pourcentage de l'augmentation initiale.
 - ✘ Bien sûr, on définit de la même manière un pourcentage d'augmentation réciproque après une baisse initiale... Dans ce cas, le pourcentage d'augmentation réciproque est supérieur au pourcentage de la baisse initiale.
 - ✘ Si k est le coefficient multiplicateur initial, alors le coefficient multiplicateur réciproque est $\frac{1}{k}$.

$$\begin{array}{ccc} x_i & \xrightarrow{\times k} & x_f \\ & \xleftarrow{+k} & \\ & \xleftarrow{\times \frac{1}{k}} & \end{array}$$

EXERCICE TYPE 8 Déterminer des pourcentages d'évolution réciproque

a.
$$x_i \xrightarrow{+25\%} x_f$$
$$\xleftarrow{-? \%}$$

b.
$$x_i \xrightarrow{-16\%} x_f$$
$$\xleftarrow{+? \%}$$

Solution Utilisons les coefficients multiplicateurs.

a.
$$x_i \xrightarrow{\times 1,25} x_f$$
$$\xleftarrow{\times \frac{1}{1,25}}$$

b.
$$x_i \xrightarrow{\times 0,84} x_f$$
$$\xleftarrow{\times \frac{1}{0,84}}$$

$$\frac{1}{1,25} = 0,80 \quad \text{et} \quad 1 - 0,80 = 0,20$$

La baisse réciproque est de 20 %.

$$\frac{1}{0,84} \approx 1,1904$$

La hausse réciproque est 19,04 %.

IV. Indices

Exemple On analyse souvent l'évolution d'un cours d'une action, d'un prix, ... en prenant la valeur 100 comme valeur initiale de référence...

Les valeurs ainsi obtenues par proportionnalité s'appellent des *indices*.

Jours	13/03/2012	14/03/2012	15/03/2012
Cours de l'action (en euros)	2,75	3	2,65
Indices	100	$\frac{3}{2,75} \times 100$ $\approx 109,1$	$\frac{2,65}{2,75} \times 100$ $\approx 96,4$

A SAVOIR

$$\frac{I}{100} = \frac{C_f}{C_i} \Leftrightarrow I = \frac{C_f}{C_i} \times 100$$

Cours de l'action	C_i	C_f
Indices	100	I

Théorème

Le pourcentage d'évolution du cours est égal au pourcentage d'évolution de l'indice.

Preuve Notons k le coefficient multiplicateur correspondant au pourcentage d'évolution du cours de l'action.

$$\text{On a alors : } C_f = k \times C_i \Leftrightarrow \frac{C_f}{C_i} = k$$

$$\Leftrightarrow \frac{I}{100} = k \quad (\text{voir propriété de l'indice ci-dessus})$$

$$\Leftrightarrow I = k \times 100$$

Cette dernière expression montre que k est aussi le coefficient multiplicateur correspondant au pourcentage d'évolution de l'indice.

EXERCICE TYPE 9 Utiliser les indices en économie

On considère la situation ci-dessus présentée dans l'exemple...

Quel est le pourcentage d'évolution de l'action entre le 13/03 et le 14/03 ? entre le 13/03 et le 15/03 ?

Solution

Ou utilise les indices pour obtenir rapidement les pourcentages d'évolution de l'action par rapport à la date initiale de référence (ici le 13/03).

Grâce au tableau d'indices ci-dessus, on peut conclure que :

✕ $109,1 - 100 = 9,1$. L'action a augmenté de 9,1 % environ entre le 13/03 et le 14/03.

✕ $96,4 - 100 = -3,6$. L'action a baissé de 3,6 % environ entre le 13/03 et le 15/03.