# FICHE n°6
## Etude des variations d'une fonction

*Cette fiche de leçon n'est pas exactement conforme à celle vue en classe. Elle est différemment organisée et davantage rédigée afin de vous permettre à un élève absent de pouvoir mieux la comprendre…*

## I. Etudier les variations d'une fonction grâce à l'étude du signe de sa dérivée

***THEOREME FONDAMENTAL*** *(admis)*

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Lorsque la fonction dérivée ***f '*** **est** ***strictement positive*** sur I, alors ***f*** **est** ***strictement croissante*** sur I.
- Lorsque la fonction dérivée ***f '*** **est** ***strictement négative*** sur I, alors ***f*** **est** ***strictement décroissante*** sur I.
- Lorsque la fonction dérivée *f '* est *nulle* sur I, alors *f* est *constante* sur I.

Grâce à ce théorème fondamental, on peut étudier les variations d'une fonction de la manière suivante :

### *Plan d'étude des variations d'une fonction par l'étude du signe de sa dérivée*

- *Etape 1 :* on cherche dans l'énoncé le domaine de définition de la fonction.
- *Etape 2 :* on calcule la dérivée de la fonction (voir fiche « Calculer la dérivée d'une fonction »).

Pour étudier le signe de la dérivée (voir fiche « Etudier le signe d'une fonction») :

- *Etape 3 :* on analyse la forme de l'expression de la dérivée *f'(x)* :
  - *soit f'(x) est de la forme ax+b : on peut alors étudier le signe directement (voir fiche n°3)*
  - *soit f'(x) est un trinôme (ax²+bx+c) : on peut alors étudier le signe directement (voir fiche n°3)*
  - *sinon on essaie de factoriser f'(x) pour se ramener à des expressions ax+b ou ax²+bx+c.*
- *Etape 4 :* on cherche ensuite les valeurs de $x$ qui annulent la dérivée, c'est-à-dire tel que $f'(x) = 0$ (pour les tangentes horizontales éventuelles par exemple)
- *Etape 5 :* on en déduit le signe final de *f'(x)* dans un tableau de signe.
- *Etape 6 :* A partir du signe de la dérivée, on détermine les variations de la fonction (théorème fondamental ci-dessus)
- *Etape 7 :* on complète le tableau de variations avec les minimum(s) et/ou maximum(s) de la fonction.

***EXERCICE TYPE 1*** **Déterminer par le calcul les variations d'une fonction**

Dans une PME qui fabrique et vends des jouets identiques, le bénéfice réalisé par la vente de $x$ objets est donné, en euros, par $B(x) = -x^3 + 60x^2 + 528x$.

Etudier les variations de cette fonction B sur $\mathbb{R}$. *On pourra démontrer que* $B'(x) = 3(-x-4)(x-44)$.

*Remarque* On propose ici deux solutions détaillées selon le choix effectué à l'étape 3 ci-dessus…

<u>*Solution détaillée 1*</u> **<u>*Etude directe du signe de la dérivée en utilisant la fiche n°3*</u>**

- *On calcule la dérivée de la fonction.*

☞ $B'(x) = -3x^2 + 60\times 2x + 528 = -3x^2 + 120x + 528$

- *On étudie le signe de la dérivée en commençant par chercher les valeurs de x qui annulent la dérivée*

☞ $B'(x)$ est de la forme $ax^2+bx+c$.

Calculons le discriminant : $\Delta = 120^2 - 4\times(-3)\times 528 = 20\ 736$

D'après la leçon (fiche n°3), comme $\Delta>0$, on a :

- $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-120-\sqrt{20\ 736}}{2\times(-3)} = 44$ et $x_2 = \dfrac{-120+\sqrt{20\ 736}}{2\times(-3)} = -4$
- $B(x)$ est du signe de a à l'extérieur de $x_1$ et $x_2$…

On obtient ainsi le tableau de signe suivant pour la dérivée :

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $44$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $B(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-1\ 088$ | ↗ | $54\ 208$ | ↘ | $-\infty$ |

- *A partir du signe de la dérivée, on détermine les variations de la fonction (voir tableau ci-dessus)*
- *Enfin, on complète le tableau de variations avec les minimum(s) et/ou maximum(s) de la fonction.*

☞ $B(-4) = -(-4)^3 + 60\times(-4)^2 + 528\times(-4) = -1\ 088$ et $B(44) = -44^3 + 60\times 44^2 + 528\times 44 = 54\ 208$

<u>*Solution détaillée 2*</u> **<u>*Etude par factorisation du signe de la dérivée*</u>**

- *On calcule la dérivée de la fonction.*

☞ $B'(x) = -3x^2 + 60\times 2x + 528 = -3x^2 + 120x + 528$

- *On factorise* $B'(x)$ *pour se ramener à des expressions* $ax+b$ *et/ou* $ax^2+bx+c$

☞ On utilise l'aide proposée dans l'énoncé…

$3(-x-4)(x-44) = 3[-x\times x+(-x)\times(-44)+(-4)\times x+(-4)\times(-44)]$

$= 3[-x^2 + 44x - 4x + 176] = 3[-x^2 + 40x + 176] = -3x^2 + 120x + 528$

- *On étudie le signe de la dérivée grâce à un tableau de signes avec les expressions* $(-x-4)$ *et* $(x-44)$

☞ On cherche d'abord les valeurs qui annulent ces deux expressions :

$-\boldsymbol{x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = -4$ ; $\boldsymbol{x} - 44 = 0 \Leftrightarrow x = 44$

☞ On obtient ainsi le tableau de signe suivant pour la dérivée :

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $44$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x-4$ | | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | |
| $x-44$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $B'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $B(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-1\ 088$ | ↗ | $54\ 208$ | ↘ | $-\infty$ |

- *A partir du signe de la dérivée, on détermine les variations de la fonction (voir tableau ci-dessus)*
- *Enfin, on complète le tableau de variations avec les minimum(s) et/ou maximum(s) de la fonction.*

☞ $B(-4) = -(-4)^3 + 60\times(-4)^2 + 528\times(-4) = -1\ 088$ et $B(44) = -44^3 + 60\times 44^2 + 528\times 44 = 54\ 208$

***EXERCICE TYPE 2*** **Déterminer le minimum ou le maximum d'une fonction**

La capacité maximale de production de la PME étudiée dans l'exercice type 1 précédent est de 60 jouets. Déterminer le nombre d'objets vendus pour obtenir le bénéfice maximal et le bénéfice maximal ainsi obtenu.

*Solution*

☞ D'après cette énoncé, la fonction B a en fait pour domaine de définition [0 ; 60] :
En effet : - cette fonction n'est en fait définie que pour $x > 0$ puisque $x$ est un nombre d'objets…
- et la capacité maximale de production de cette PME est de 60 jouets.

☞ D'après l'exercice type 1 précédent, le tableau de variations de la fonction B est donc finalement le suivant :

| $x$ | 0 | 44 | 60 |
|---|---|---|---|
| B($x$) | 0 ↗ | 54 208 | ↘ 31 680 |

On peut donc en déduire que :

☞ Il faut vendre 44 objets pour atteindre le bénéfice maximal.
☞ Le bénéfice maximal sera alors de 54 208 €.

## II. *Variations d'une fonction et comparaison*

***EXERCICE TYPE 3*** **Exploiter le sens de variations pour obtenir des inégalités**

Pour la PME étudiée dans les exercices type 1 et 2 précédents, déterminer sans calculs s'il vaut mieux produire :
***1.*** 38 ou 41 objets ?
***2.*** 47 ou 51 objets ?

*Solution*

☞ Pour répondre à cette question il suffit d'observer le tableau de variations… Aucun calcul n'est nécessaire !

*A SAVOIR*

Lorsqu'une fonction $f$ est croissante, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
Lorsqu'une fonction $f$ est décroissante, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

***1.*** La fonction B est croissante sur l'intervalle [0 : 44], donc B(38) < B(41).
**Il vaut alors mieux produire 41 objets plutôt que 38.**

***2.*** La fonction B est décroissante sur l'intervalle [44 : 60], donc B(47) > B(51).
**Il vaut alors mieux produire 47 objets plutôt que 51.**