FICHE n°5
Déterminer une fonction dérivée

Définition La fonction qui, au nombre ***a***, associe le nombre dérivé ***f ’(a)*** s’appelle la fonction ***dérivée*** de ***f*** .
Elle est notée ***f ’*** **.**

Remarque Pour par exemple déterminer un nombre dérivé rapidement (voir par exemple « Equations de tangente à une courbe » - fiche n°4), il est utile de pouvoir déterminer le plus rapidement possible une fonction dérivée…

Cette fiche propose donc les fonctions dérivées usuelles et quelques calculs avec des fonctions dérivées.

I. Dérivées des fonctions usuelles

Le tableau suivant doit être parfaitement connu :

fonction…	***f***	définie sur …	dérivable sur …	dérivée ***f ’***
constante	$f(x) = b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
identité	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
affine	$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
carré	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
puissance	$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = n.x^{n-1}$
inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\} =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
radical	$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$	$]0\,;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

EXERCICE TYPE 1

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes : $f(x) = -3x + 1$; $g(x) = 2x - 1$; $h(x) = x^5$; $k(x) = \pi$.

Solution

f *est une fonction affine, donc :* $f'(x) = -3$;

g *est une fonction affine, donc :* $g'(x) = 2$;

h *est une fonction puissance, donc :* $h'(x) = 5x^4$;

k *est une fonction constante, donc :* $k'(x) = 0$;

II. *Dérivées et opérations*

<u>*Remarque*</u> Pour dériver des fonctions plus complexes, nous avons notamment besoin de savoir comment dériver des fonctions qui sont sous forme d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.

Dérivée d'une somme	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée du produit de u par une constante k	$(ku)' = k.u'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'.v + u.v'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$ si $v \neq 0$
Dérivée d'un quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}$ si $v \neq 0$

EXERCICE TYPE 2

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = 2x^3 + x - 1 \ ; \quad k(x) = \frac{5}{x} + x^2 - 4\sqrt{x} \ ; \quad d(x) = -2x(3x^2+1) \ ; \quad g(x) = \frac{1}{x^3} \ ; \quad h(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$$

<u>*Solution*</u>

☞ ***f*** est la somme de deux fonctions $u = 2x^3$ et $v = x - 1$ donc : $f'(x) = 2\times3x^2 + 1 = 6x^2 + 1$

☞ ***k*** est la somme de trois fonctions $u = \frac{5}{x}$, $v = x^2$ et $w = -4\sqrt{x}$

donc : $k'(x) = 5 \times (-\frac{1}{x^2}) + 2x - 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-5}{x^2} + 2x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

☞ ***d*** est le produit de deux fonctions $u = -2x$ et $v = 3x^2+1$.
$u' = -2$ $\quad v' = 3\times2x + 0 = 6x$

donc : $d'(x) = u'.v + v'.u = -2\times(3x^2+1) + (-2x)\times6x = -6x^2 - 2 - 12x^2 = -18x^2 - 2$

☞ ***g*** est l'inverse de la fonction $v = x^3$
$v' = 3x^2$

donc : $g'(x) = \frac{-v'}{v^2} = \frac{-3x^2}{(x^3)^2} = \frac{-3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$

☞ ***h*** est le quotient de deux fonctions $u = 2x + 1$ et $v = 3x - 1$.
$u' = 2$ $\quad v' = 3$

donc : $h'(x) = \frac{u'.v - v'.u}{v^2} = \frac{2\times(2x+1) - 3\times(2x+1)}{(3x-1)^2} = \frac{4x + 2 - 6x - 3}{(3x-1)^2} = \frac{-2x-1}{(3x-1)^2}$