FICHE n°4
Nombre dérivé et tangente à une courbe

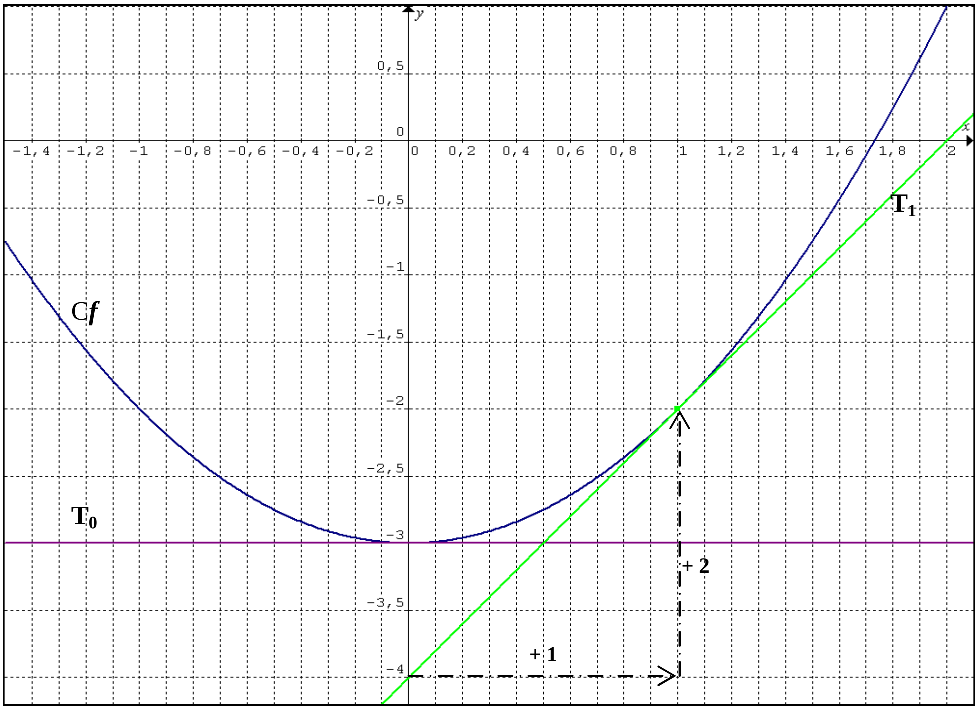
I. Pour comprendre la notion de tangente à une courbe

<u>*L'idée*</u> La définition de la tangente sera donnée au paragraphe III… Mais l'« idée principale » est la suivante :

La ***tangente à une courbe en un point A*** est une droite :
- ¤ qui passe par le point A ;
- ¤ qui « effleure » la courbe .

<u>EXERCICE TYPE 1</u> ***Lire graphiquement une équation d'une tangente***

On a représenté ci-dessous la courbe (C***f***) représentative d'une fonction ***f***.



Déterminer graphiquement une équation de :

a. la tangente T_1 à la courbe (C***f***) au point d'abscisse 1.

b. la tangente T_0 à la courbe (C***f***) au point d'abscisse 0.

<u>*Solution*</u>

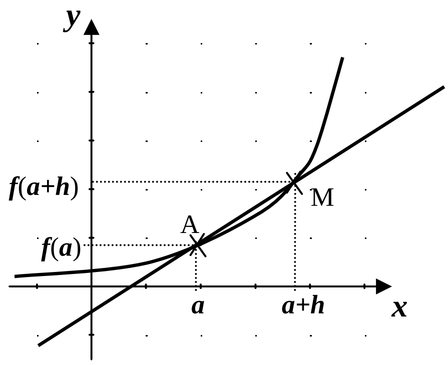
a. Le point de la courbe d'abscisse 1 est le point (1 ; –2).
Graphiquement (voir fiche « Equations de droites »), on peut déterminer :
- ¤ le coefficient directeur de la droite T_1 : $\dfrac{2}{1} = 2$
- ¤ l'ordonnée à l'origine de la droite T_1 : –4

Une équation de la tangente (T_1) est donc : $y = 2x - 4$.

b. Le point de la courbe d'abscisse 0 est le point (0 ; –3).
Comme la droite (T_0) est horizontale (pas de pente), son coefficient directeur est 0.
Une équation de la tangente (T_0) est donc : $y = -3$.

<u>*Remarque*</u> La tangente à une courbe en un point A donne « l'allure de la pente de la courbe » <u>juste autour de point A</u>.

II. *Nombre dérivé*



1. ***Vers la définition…***

Pour comprendre

Soit f une fonction définie sur un intervalle I autour d'un nombre réel a.

Le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a+h$.

Graphiquement, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AM).

Lorsque h tend vers 0, le point M s'approche de A, la droite (AM) tend à devenir comme une tangente…

Définition

Le ***nombre dérivé*** d'une fonction f en a est la limite quand h tend vers 0 du quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Ce nombre dérivé est noté $f\,'(a)$ et on dit que la fonction f est ***dérivable en a***.

Remarque Dans certains cas (peu courant en 1ère ES…), ce quotient n'a pas de limite quand h tend vers 0. On dit alors que la fonction n'est pas dérivable en a.

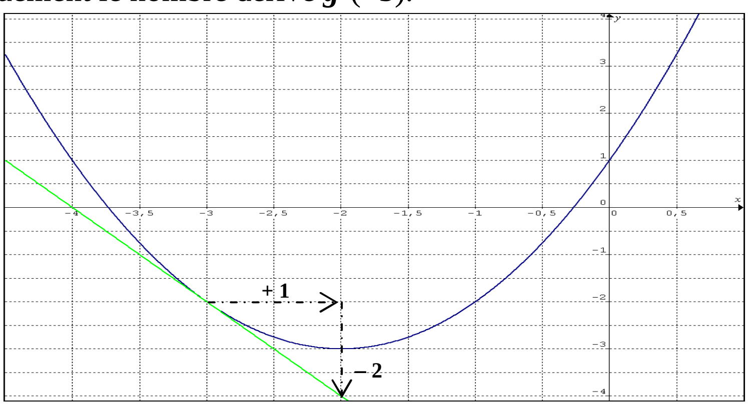
2. ***Aspect graphique***

Propriété

> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et ***Cf*** sa courbe représentative .
> La tangente à la courbe ***Cf*** au point A d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f\,'(a)$.

EXERCICE TYPE 2 ***Déterminer graphiquement un nombre dérivé***

On a représenté ci-dessous la courbe (C***g***) représentative d'une fonction ***g*** ainsi que la tangente Δ à (C***g***) au point d'abscisse (–3).
Déterminer graphiquement le nombre dérivé ***g'***(–3).



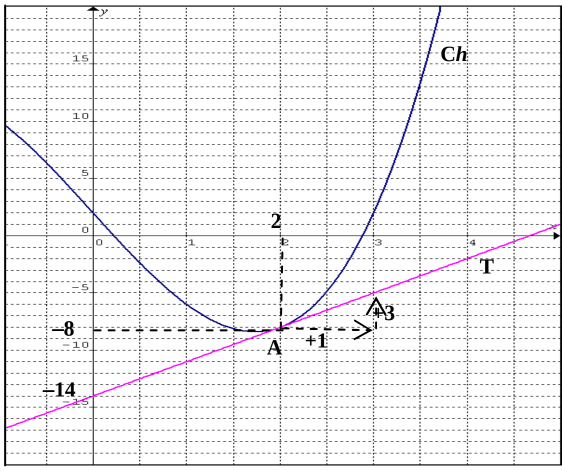
Solution

D'après la leçon, ***g'***(–3) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C***g***) au point d'abscisse (–3), c'est donc le coefficient directeur de Δ.

Graphiquement, on a donc : $g'(-3) = \dfrac{-2}{+1} = -2$

Propriété | Une équation de la tangente à la courbe $\boldsymbol{C_f}$ au point A d'abscisse $\boldsymbol{a}$ est : $\boldsymbol{y = f'(a)\times(x - a) + f(a)}$.

EXERCICE TYPE 3 ***Déterminer une équation d'une tangente***



On considère la fonction $\boldsymbol{h : x \longmapsto x^3 - 9x + 2}$.
On note (C$\boldsymbol{h}$) sa courbe représentative.
On admet dans cet exercice que $\boldsymbol{h'(2) = 3}$.

a. Déterminer une équation de la tangente **T** à la courbe (C$\boldsymbol{h}$) au point **A** d'abscisse **2**.

b. Tracer la tangente **T** .

Solution

a. On sait que : ¤ $h(2) = 2^3 - 9\times 2 + 2 = 8 - 18 + 2 = -8$

¤ $h'(2) = 3$

D'après la leçon, au point A d'abscisse 2, une équation de la tangente est :

$$y = f'(2)\times(x - 2) + f(2)$$
$$y = 3\times(x - 2) + (-8)$$
$$y = 3x - 6 - 8$$
$$\mathbf{T} : y = 3x - 14$$

b. Pour tracer la tangente, on peut utiliser plusieurs méthodes… Par exemple :

¤ *Méthode 1* : En utilisant les significations graphiques de l'ordonnée à l'origine (**–14**) et la pente **3**.

¤ *Méthode 2* : En utilisant la signification graphique du coefficient directeur à partir du point **A**(2 ; –8).

¤ *Méthode 3* : En déterminant deux points de la tangente à partir de l'équation obtenue en **a.**
- pour $x = 2$, on a : $y = 3\times 2 - 14 = -8$ donc **A(2 ; –8)** $\in$ **T**.
- pour $x = 0$, on a : $y = 3\times 0 - 14 = -14$ donc **B(0 ; –14)** $\in$ **T**. (ordonnée à l'origine)