FICHE n°3
Etudier le signe d'une fonction

I. Signe d'une fonction trinôme

<u>Etude</u> On rappelle que $P(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ (voir fiche « Expressions algébriques »)

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'expression entre crochets sera toujours positive donc le trinôme sera toujours du même signe que a.
- Si $\Delta = 0$, alors l'expression entre crochets sera toujours positive donc le trinôme est du même signe que a.
- Si $\Delta > 0$, on sait que $P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (voir fiche « Equations »)

  avec : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

  $P(x)$ a alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$x - x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$(x - x_1)(x - x_2)$	$+$		$-$		$+$
$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	***Signe de a***	0	***Signe opposé de a***	0	***Signe de a***

<u>*Définition et théorème*</u>

On considère une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

On note Δ et on appelle ***discriminant*** le nombre : $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.

- Si $\Delta < 0$, $P(x)$ est toujours ***du signe de a***.
- Si $\Delta = 0$, $P(x)$ est toujours ***du signe de a*** (excepté pour $x_0 = -\frac{b}{2a}$ où $P(x_0) = 0$)
- Si $\Delta > 0$,
  - $P(x)$ est ***du signe de a à l'extérieur de x_1 et x_2***
  - $P(x)$ est ***du signe opposé de a entre x_1 et x_2***

  avec $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

<u>EXERCICE TYPE 1</u> Résoudre l'inéquation $6x^2 + x - 1 \geq 0$

<u>*Solution*</u> *(voir Ex type 3 fiche « Equations »)*

On sait que $\Delta = 25$ et que les racines de $6x^2 + x - 1 = 0$ sont : $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{3}$

Comme $\Delta > 0$ et comme $a = 6 > 0$, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$6x^2 + x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Conclusion : $\boxed{\mathbf{S = \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3} ; +\infty\right[}}$.

II. Signe d'une expression produit

Rappel (à savoir)

si $\boldsymbol{a}$ est négatif,

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		$-\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$		$+\infty$
$\boldsymbol{ax+b}$		$+$	0	$-$	

si $\boldsymbol{a}$ est positif,

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		$-\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$		$+\infty$
$\boldsymbol{ax+b}$		$-$	0	$+$	

Méthode Pour déterminer le tableau de signe d'une expression produit, on réalise un tableau de signe en appliquant la règle des signes d'un produit…

EXERCICE TYPE 2 Déterminer le signe de $(-2x-1)(3x-2)$ selon les valeurs de x.

Solution

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
$-2x-1$		$+$	0	$-$		$-$	
$3x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-2x-1)(3x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Cela signifie que : $(-2x-1)(3x-2) < 0$ pour tous les nombres x de $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$

$(-2x-1)(3x-2) > 0$ pour tous les nombres x de $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{2}{3}\right[$