FICHE n°2
Résoudre une équation

L'objectif de cette fiche est principalement d'apprendre à résoudre les ***équations du second degré à une inconnue x***, c'est-à-dire les équations qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a, b et c sont des réels donnés ($a \neq 0$)

I. Equations du 1er degré (rappels de 3ème)

Ce paragraphe n'a pas été traité en cours, mais c'est un rappel de 2nde utiles aux élèves ayant quelques difficultés pour comprendre de nombreuses transformations d'équations…

Méthode

Pour résoudre une équation du 1er degré, on utilise les règles suivantes pour conserver l'égalité :
- On ajoute ou on soustrait un même nombre aux deux membres de l'égalité ;
- On multiplie ou on divise par un même nombre (différent de 0) les deux membres de l'égalité.

Exemple détaillé Résoudre l'équation $3x + 1 = 7x - 2$.

- Pour « regrouper les x » dans un même membre, on soustrait $3x$ à chaque membre de l'égalité :
  $$3x + 1 \mathbf{- 3x} = 7x - 2 \mathbf{- 3x}$$
  On réduit : $1 = 4x \mathbf{- 2}$
- De la même manière, on ajoute 2 à chaque membre de l'égalité :
  On obtient : $3 = \mathbf{4}x$
- On divise par 4 chaque membre de l'égalité :
  On obtient : $\frac{3}{4} = x$ ou encore $x = \frac{3}{4}$

Conclusion : **L'équation $3x + 1 = 7x - 2$ a une solution : $x = \frac{3}{4}$**. On note aussi : $\boxed{S = \left\{\frac{3}{4}\right\}}$.

II. Equations du type $x^2 = a$

Rappel

Soit a un nombre donné.
- ✓ Si a est négatif, l'équation $x^2 = a$ n'a aucune solution.
- ✓ Si $a = 0$, l'équation $x^2 = 0$ a une seule solution : $x = 0$.
- ✓ Si a est positif, l'équation $x^2 = a$ a deux solutions $x = -\sqrt{a}$ et $x = \sqrt{a}$.

EXERCICE TYPE 1 Résoudre les équations $x^2 = -\pi$; $x^2 = 169$ et $(3x + 2)^2 = 0$

Solution
1. L'équation $x^2 = -\pi$ n'a aucune solution car $-\pi < 0$ $\boxed{S = \emptyset}$
2. L'équation $x^2 = 169$ a deux solutions : $x = -\sqrt{169} = -13$ et $x = \sqrt{169} = 13$ $\boxed{S = \{-13 , 13\}}$
3. L'équation $(3x + 2)^2 = 0$ revient à : $3x + 2 = 0$ et donc à : $3x = -2$ soit : $x = -\frac{2}{3}$

   L'équation $(3x + 2)^2 = 0$ a donc une seule solution : $x = -\frac{2}{3}$. $\boxed{S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}}$

III. Résoudre une « équation-produit »

<u>Propriété</u> Si un produit est égal à 0, alors l'un de ces facteurs est égal à 0.

EXERCICE TYPE 2 Résoudre l'équation $(3\boldsymbol{x} - 1)(2\boldsymbol{x} + 1) = 0$.

<u>Solution</u> : Si un produit est nul, alors l'un de ces facteurs est nul.
Donc :

soit $3\boldsymbol{x} - 1 = 0$

$3\boldsymbol{x} = 1$

$\boldsymbol{x} = \frac{1}{3}$

soit $2\boldsymbol{x} + 1 = 0$

$2\boldsymbol{x} = -1$

$\boldsymbol{x} = -\frac{1}{2}$

L'équation $(3\boldsymbol{x} - 1)(2\boldsymbol{x} + 1) = 0$ a donc <u>deux solutions</u> : $\boldsymbol{x = \frac{1}{3}}$ et $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$.

$$\boxed{\mathbf{S} = \left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\ ,\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right\}}$$

IV. Résoudre une équation du 2nd degré : $ax^2 + bx + c = 0$ (le cas général)

<u>Etude</u> On souhaite résoudre une équation donnée sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$).
En utilisant la forme canonique d'un trinôme (voir fiche « Expressions algébriques »),

cela revient à résoudre : $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$

ou encore, comme $a \neq 0$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ *(forme *)*

soit $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

D'après le paragraphe I.,

- Si $\Delta < 0$, cette équation ne peut pas avoir de solution…
- Si $\Delta = 0$, cette équation a une unique solution.
  Dans ce cas, on a alors : $x + \frac{b}{2a} = 0$, soit $x = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, on sait que cette équation a deux solutions.

  A partir de la *forme* * ci-dessus, on peut factoriser grâce à la relation $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

  On a alors : $\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$

  Donc les deux solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

<u>*Définition et théorème*</u>

On considère une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.
On note Δ et on appelle ***discriminant*** le nombre : $\boxed{\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}}$.

- Si $\Delta < 0$, cette équation n'a aucune solution.
- Si $\Delta = 0$, cette équation a une unique solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, cette équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

EXERCICE TYPE 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $x^2 + x + 1 = 0$ (b) $-2x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0$ (c) $6x^2 + x - 1 = 0$

Solution : Dans chaque cas, il faut commencer par calculer le discriminant :

(a) $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac} = 1^2 - 4\times1\times1 = 1 - 4 = -3$
Comme $\Delta < 0$, l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a aucune solution.
$\boxed{\mathbf{S = \varnothing}}$

(b) $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac} = 2^2 - 4\times(-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 - 4 = 0$

Comme $\Delta = 0$, l'équation $-2x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0$ a une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\times(-2)} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\mathbf{S = \left\{\frac{1}{2}\right\}}}$

(c) $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac} = 1^2 - 4\times6\times(-1) = 1 + 24 = 25$

Comme $\Delta > 0$, l'équation $6x^2 + x - 1 = 0$ a deux solutions :

- $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times6} = \frac{-1-5}{2\times6} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$
- $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\times6} = \frac{-1+5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$\boxed{\mathbf{S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}}}$