FICHE n°1
Transformer une expression algébrique

L'objectif de cette fiche est principalement d'apprendre à savoir modifier la forme d'un ***trinôme***, c'est-à-dire d'une expression algébrique qui peut s'écrire sous la forme :

$$ax^2 + bx + c$$

où ***a, b*** et ***c*** sont des réels donnés ($a \neq 0$).

I. Forme développée et forme factorisée

Rappels La ***forme développée*** d'une expression littérale est la forme sous laquelle celle-ci s'écrit comme une somme (ou différence) de termes.
La ***forme factorisée*** d'une expression littérale est la forme sous laquelle celle-ci s'écrit comme un produit de facteurs.

Remarque Pour développer ou factoriser une expression littérale, on peut utiliser la distributivité et les identités remarquables vues depuis le collège, ci-dessous rappelées :

$(a + b)^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2$	=	$a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b)$	=	$a^2 - b^2$
formes factorisées		*formes développées*

EXERCICE TYPE 1

On considère l'expression $E(x) = (2x + 1)(3x - 4)$

1. Montrer que : $E(x) = 6x^2 - 5x - 4$
2. Quelle forme est le plus adaptée :
   a. pour résoudre l'équation $E(x) = 0$?
   b. pour résoudre l'équation $E(x) = -4$?

Solution 1. $E(x) = (2x + 1)(3x - 4) = 2x\times3x + 2x\times(-4) + 1\times3x + 1\times(-4)$
$= 6x^2 - 8x + 3x - 4$
$= 6x^2 - 5x - 4$

2. a. Pour résoudre une équation de la forme E(x), la forme la plus adaptée est la forme factorisée → Equations-produit (voir fiche « Equations »).

Pour s'entraîner : vérifier que $S = \left\{-\frac{1}{2} , \frac{4}{3}\right\}$

b. Pour résoudre une équation de la forme E(x), la forme la plus adaptée est la forme développée puisqu'il y a le terme –4…
En effet, on a ainsi :

$6x^2 - 5x - 4 = -4$ *On ajoute 4 dans les deux membres de l'égalité…*
$6x^2 - 5x = 0$ *On factorise par x pour obtenir une équation-produit…*
$x(6x - 5) = 0$ *On résout l'équation-produit (fiche « Equations »).*

Pour s'entraîner : vérifier que $S = \left\{0 , \frac{5}{6}\right\}$

II. *Forme canonique d'un trinôme*

EXERCICE TYPE 2

On considère l'expression $P(x) = 2x^2 + 12x + 10$.
Monter que, pour tout réel x, on a : $P(x) = 2[\,(x+3)^2 - 4]$.

Solution Le plus simple est, ici, de développer l'expression $2[\,(x+3)^2 - 4]$ pour essayer de retrouver la forme développée initialement donnée…

$2[\,(x+3)^2 - 4] = 2[\,x^2 + 6x + 9 - 4] = 2[\,x^2 + 6x + 5] = 2x^2 + 12x + 10 = P(x)$.

Pour tout nombre réel x, on a donc bien : $P(x) = 2[\,(x+3)^2 - 4]$

Cette forme est dite la ***forme canonique*** de trinôme P

Propriété - définition *(Cette formule n'est pas à connaître par cœur…)*

Pour tout nombre réel x, les nombes a, b et c étant donnés, avec $a \neq 0$,

on a : $\boxed{ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] \quad \text{avec } \Delta = b^2 - 4ac}$

La forme obtenue s'appelle la ***forme canonique*** du trinôme.

Preuve Développons la forme canonique pour la comparer à la forme développée…

$$\begin{aligned}
a\left[x^2 + 2\times x\times\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]\\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]\\
&= ax^2 + bx + c
\end{aligned}$$

EXERCICE TYPE 2 (suite)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = -8$.

Solution Remarquons que, grâce à la forme canonique obtenue ci-dessus, on a : $P(x) = 2(x+3)^2 - 8$.
Utilisons cette forme pour résoudre l'équation $P(x) = -8$.

En effet : $2(x+3)^2 - 8 = -8$

$2(x+3)^2 = 0$

Comme $2 \neq 0$: $(x+3)^2 = 0$ (voir fiche « Equations »)

D'où $x + 3 = 0$

$x = -3$

Conclusion : $\mathbf{S = \{-3\}}$